10. cvičení z PSt — 22.–26.4.2024

Ještě nezávislé vektory

1. (Buffonova jehla) Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejichž okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti $d \geq \ell$. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Celková pravděpodobnost

2. Pro n.n.v. $X \sim U(0,2)$ a $Y \sim U(0,1)$ zkoumáme $P(X < Y)$. Řešte několika způsoby:

(a) Přímo z obrázku.

(b) Rozborem možností n.v. Y pomocí vzorce (analogie věty o celkové pravděpodobnosti)

$$P(X < Y) = \int_0^1 f_Y(y) P(X < Y \mid Y = y) dy.$$

(c) Rozborem možností n.v. X pomocí vzorce

$$P(X < Y) = \int_0^2 f_X(x) P(X < Y \mid X = x) dx.$$

Konvoluce

3. Buďte $X, Y, Z \sim U(0,1)$ nezávislé náhodné veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu (dvěma způsoby) – podle konvolučního vzorce i „podle obrázku“.

(b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0,1]$.

(c) Jak výsledek ověřit samplováním?

Aplikace nerovností

4. Házíme kostkou, za 1 a 2 dostaneme bod. Označme X počet bodů, které dostaneme po n (nezávislých) hodech. Odhadněte pravděpodobnost, že $X \geq n/2$.

(a) Pomocí Markovovy nerovnosti.

(b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti.

(c) Pro konkrétní n, jak lze tuto hodnotu určitě přesně?

5. Statistik chce odhadnout průměrnou výsku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \ldots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně se všech možných lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka $\bar{X}_n$ byla nejvýše 1 cm?

(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že $\bar{X}_n$ se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99 %? (Neboli $P(|\bar{X}_n - h| \leq 5) \geq 0.99$.)

(c) Statistik si všimne, že všichni měření lidé mají výšku v intervalu $(1.4, 2.1)$. Jak má upravit odhad směrodatné odchylky? Jak se změní odpovědi na předchozí otázky?

Soupis vzorečků

- **Konvoluce:** Nechť X, Y jsou spojité n.n.v. Pak $S = X + Y$ má hustotu $f_S(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s - x) dx$.
- **Markovova nerovnost:** $P(X \geq a\mathbb{E}(X)) \leq \frac{1}{a}$ pro $X \geq 0$.
- **Čebyševova nerovnost:** $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma_X) \leq \frac{1}{t^2}$.

Nápověda

1: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel). Lze řešit jako úlohu na obsah, nebo pomocí sdružené hustoty.

3: Použijte vzorec na konci první stránky.

4: Jaké je rozdělení X? Pamatujete si vzoreček na jeho střední hodnotu a rozptyl?

5: Jak se zjistí rozptyl součtu nezávislých náhodných veličin? Rozptyl násobku veličiny konstantou?

K procvičení

6. Buďte $X, Y, Z \sim Exp(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

(a) Jaké je rozdělení $X + Y$? (b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

7. Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním. Vygenerujeme náhodný bod ve čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0, 1)$). Označíme X_i indikátor jevu „i-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.

(a) Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.

(b) Položte $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(\bar{X}_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.

(c) Pro jaké n čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, ...?

(d) Jiný výpočet obsahu kruhu: $Y_i = \sqrt{1 - U_i^2}$, kde $U_i \sim U(0, 1)$. Uvědomte si, že $\mathbb{E}(Y_i)$ je obsah čtvrtkruhu, tedy $\pi/4$. Jaké je $\mathrm{var}(Y_i)$? Jaké je $\mathrm{var}(\bar{Y}_n)$?

(e) Která metoda je přesnější?

8. Víme, že průměrný počet bodů z písemky byl 40 (ze 100). Odhadněte odsud podíl studentů a alespoň 80 body. Vylepšente odhad, pokud víte, že směrodatná odchylka počtu bodů je 10.

9. Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem jedna stranami nějakého trojúhelníku.)

(a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.

(b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.

(c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

10. Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

(a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

(b) Najděte marginální hustotu f_Y.

(c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

(d) Spočtěte $\mathbb{E}(X \mid Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).

(e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.