

## 9. cvičení

### Samplování

#### Úloha 1 (Rychlé opáčko)

Nechť n.v.  $X$  má distribuční funkci  $F$ , hustotu  $f$ , střední hodnotu  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$ . Nechť dále  $Y = aX + b$ .

- Jakou střední hodnotu a rozptyl má  $Y$ ?
- Jakou distribuční funkci a hustotu má  $Y$ ?
- Pokud  $X \sim N(0, 1)$ , jak nastavit  $a$  a  $b$ , aby bylo  $Y \sim N(\alpha, \beta^2)$ ?
- Jsou-li  $\Phi$  a  $\varphi$  distribuční funkce a hustota pro  $N(0, 1)$ , jak vypadá distribuční funkce a hustota pro  $N(\mu, \sigma^2)$ ?

#### Řešení

TODO

#### Úloha 2 (Samplujeme)

Nechť  $U \sim U(0, 1)$ . Jak vyrobíte za pomoci  $U$  náhodnou veličinu

- s rozdělením  $U(a, b)$ ?
- s rozdělením  $\text{Exp}(\lambda)$ ?
- s Cauchyho rozdělením?
- s rozdělením  $N(0, 1)$ ?

(Použijte větu z přednášky.)

#### Řešení

TODO

### Spojitě vektory

#### Úloha 3 (První setkání)

Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu  $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$  pro  $x, y > 0$  (a 0 jinak).

- Určete marginální hustoty  $f_X, f_Y$ .
- Určete také distribuční funkce  $F_X, F_Y, F_{X,Y}$ .
- Jsou  $X, Y$  nezávislé?
- Najděte  $P(X + Y \leq 1)$  a  $P(X > Y)$ .

**Řešení** a)  $f_X(x) = \int_0^\infty F_{X,Y}(x, y) dy = e^{-x}$ , stejně tak  $f_Y(y)$

b)  $F_X(x) = 2 - e^{-x}$ ,  $F_{X,Y}(x, y) = (e^x - 1)(e^y - 1)e^{-a-b}$

c) Ano, součin  $f_X f_Y$  je  $f_{X,Y}$

d) První je dvojný integrál přes  $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-x-y} dy dx = \frac{e-2}{e}$ , druhý je  $\int_0^\infty \int_0^x e^{-x-y} dy dx = \frac{1}{2}$

#### Úloha 4 (Oslava)

Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisících Kč) jsou náhodné veličiny  $X$  a  $Y$ . Ze zkušenosti víte, že vektor  $(X, Y)$  má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{pro } 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- Určete konstantu  $c > 0$ .
- Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen za jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé.
- Jaké je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte víc než za jídlo?

### Řešení

TODO

### Úloha 5 (Náhodný bod)

Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočtěte pomocí ní  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Pro kontrolu spočtěte  $\mathbb{E}(Y)$  přímo (pomocí pravidla LOTUS).

### Řešení

TODO

### Úloha 6 (Buffonova jehla)

Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky  $\ell$ . Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti  $d$ . Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

*Nápověda:* Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

### Řešení

TODO

## Bonusové úlohy

### Tahák

- Sdružené rozdělení:*  $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$ .
- Sdružená hustota:*  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$ .
- Marginální hustota:*  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$ .
- Nezávislost:*  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ .
- Dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta):

$$\int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu  $\infty - \infty$ “, neboli  $\int_X \int_Y |f(x, y)|$  musí být konečný.

- pro „rozumnou“ množinu  $A$

$$P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

- Cauchyho rozdělení:*  $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$ , nemá střední hodnotu.

## Domácí úkol 9

**Úloha 1** (Doprava)

Náhodná veličina  $X$  udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina  $Y$  udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro na Malostranské (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor  $(X, Y)$  má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
- b) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
- c) S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?