

9. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 12. 4. 2023

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

Samplování

Úloha 1 (Rychlé opáčko)

Nechť n.v. X má distribuční funkci F , hustotu f , střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 . Nechť dále $Y = aX + b$.

- Jakou střední hodnotu a rozptyl má Y ?
- Jakou distribuční funkci a hustotu má Y ?
- Pokud $X \sim N(0, 1)$, jak nastavit a a b , aby bylo $Y \sim N(\alpha, \beta^2)$?
- Jsou-li Φ a φ distribuční funkce a hustota pro $N(0, 1)$, jak vypadá distribuční funkce a hustota pro $N(\mu, \sigma^2)$?

Úloha 2 (Samplujeme)

Nechť $U \sim U(0, 1)$. Jak vyrobíte za pomoci U náhodnou veličinu

- s rozdělením $U(a, b)$?
- s rozdělením $\text{Exp}(\lambda)$?
- s Cauchyho rozdělením?
- s rozdělením $N(0, 1)$?

(Použijte větu z přednášky.)

Spojitě vektory

Úloha 3 (První setkání)

Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x, y) = e^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

- Určete marginální hustoty f_X, f_Y .
- Určete také distribuční funkce $F_X, F_Y, F_{X,Y}$.
- Jsou X, Y nezávislé?
- Najděte $P(X + Y \leq 1)$ a $P(X > Y)$.

Úloha 4 (Oslava)

Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zveďte všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisících Kč) jsou náhodné veličiny X a Y . Ze zkušenosti víte, že vektor (X, Y) má spojitě rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y) & \text{pro } 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- Určete konstantu $c > 0$.
- Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen za jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé.
- Jaké je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte víc než za jídlo?

Úloha 5 (Náhodný bod)

Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
- Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
- Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

Úloha 6 (Buffonova jehla)

Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ . Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d . Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.

Nápověda: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

Bonusové úlohy

Tahák

- Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$.
- Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.
- Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$.
- Nezávislost:* $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- Dvojně integrály jde prohazovat (Fubiniho věta):

$$\int_X \int_Y f(x, y) dy dx = \int_Y \int_X f(x, y) dx dy.$$

Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$ “, neboli $\int_X \int_Y |f(x, y)|$ musí být konečný.

- pro „rozumnou“ množinu A

$$P((X, Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

- Cauchyho rozdělení:* $F_X(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$, nemá střední hodnotu.

Domácí úkol 9

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

Zadáno 12. 4. 2023

Pravděpodobnost a statistika 1

Odevzdejte do 19. 4. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

Úloha 1 (Doprava)

Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro na Malostranské (také v minutách).

Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor (X, Y) má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?
- Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?
- S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?