9. cvičení

Samplování

Úloha 1 (Rychlé opáčko)
Nechť n.v. X má distribuční funkci F, hustotu f, střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Nechť dále $Y = aX + b$ (a mějme $a > 0$).

a) Jakou střední hodnotu a rozptyl má Y?

b) Jakou distribuční funkci a hustotu má Y?

c) Pokud $X \sim N(0,1)$, jak nastavit a a b, aby bylo $Y \sim N(\alpha, \beta^2)$?

d) Jsou-li Φ a φ distribuční funkce a hustota pro $N(0,1)$, jak vypadá distribuční funkce a hustota pro $N(\mu, \sigma^2)$?

Řešení a) $\mathbb{E}[Y] = a\mathbb{E}[X] + b, \mathrm{var}(Y) = a^2\mathrm{var}(X)$

b) $F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a}), f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X(\frac{y-b}{a})$

c) $b = \alpha, a = \beta$.

d) Minulé cviko - tabulka

Úloha 2 (Samplujeme)
Nechť $U \sim U(0,1)$. Jak vyrobíte za pomoci U náhodnou veličinu

a) s rozdělením $U(a,b)$?

b) s rozdělením $\mathrm{Exp}(\lambda)$?

c) s Cauchyho rozdělením?

d) s rozdělením $N(0,1)$?

(Použijte větu z přednášky.)

Řešení a) $A = (b-a)U + a$

b) $B = -\ln(1-U) \rightsquigarrow P[B \le b] = P[-\ln(1-U) \le b] = P[1 - U \ge e^{-b}] = P[U \le 1 - e^{-b}] = 1 - e^{-b}$

c) TODO

d) TODO

Spojité vektory

Úloha 3 (První setkání)
Nechť X, Y mají sdruženou hustotu $f_{X,Y}(x,y) = \mathrm{e}^{-x-y}$ pro $x, y > 0$ (a 0 jinak).

a) Určete marginální hustoty f_X, f_Y.

b) Určete také distribuční funkce F_X, F_Y, $F_{X,Y}$.

c) Jsou X, Y nezávislé?

d) Najděte $P(X + Y \le 1)$ a $P(X > Y)$.

Řešení a) $f_X(x) = \int_0^\infty F_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y = e^{-x}$, stejně tak $f_Y(y)$

b) $F_X(x) = 1 - e^{-x}, F_{X,Y}(x,y) = (1-e^x)(1-e^y)$

c) Ano, součin $f_X f_Y$ je $f_{X,Y}$

d) První je dvojný integrál přes $\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{-x-y} dydx = \frac{e-2}{e}$, druhý je $\int_0^\infty \int_0^x e^{-x-y} dydx = \frac{1}{2}$

Úloha 4 (Oslava)
Chystáte oslavu narozenin ve své oblíbené restauraci a zvete všechny své příbuzné (budete za ně platit). Množství peněz, které všichni vaši hosté dohromady projí a propijí (v tisících Kč) jsou náhodné veličiny X a Y. Ze zkušenosti víte, že vektor (X, Y) má spojité rozdělení charakterizované sdruženou hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{pro } 0 < x < 2, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a) Určete konstantu $c > 0$.

b) Jaké je rozdělení částky, kterou zaplatíte jen za nápoje? Jaké je rozdělení obnosu, který padne jen za jídlo? Jsou tyto dvě veličiny nezávislé.

c) Jaké je pravděpodobnost, že za pití zaplatíte víc než za jídlo?

Řešení a) $\int_0^2 \int_0^2 (x+y) dydx = 8 \rightsquigarrow c = 1/8$

b) $f_X(x) = (x+1)/4$ na $[0, 2]$ a 0 jinak, pro y totéž symetricky. Jsou závislé, protože $f_X(x) f_Y(x) \neq F_{X,Y}(x, y)$.

c) $P[X > Y] = \int_0^2 \int_0^x \frac{x+y}{8} dydx = 1/2$.

Úloha 5 (Náhodný bod)
Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

Řešení a) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{2}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

b) $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y^2 > 1 \\ \frac{2 \cdot \sqrt{1-y^2}}{\pi} & y^2 \leq 1 \end{cases}$, $\mathbb{E}[Y] = \int_{-1}^1 \frac{2 \cdot y \sqrt{1-y^2}}{\pi} dy = 0$, prim. fce je $\frac{-2(1-y^2)^{3/2}}{3\pi}$

Úloha 6 (Buffonova jehla)
Na nekonečnou podlahu hodíme náhodně jehlu délky ℓ. Podlaha je z prken, jejich okraje tvoří rovnoběžné přímky ve vzdálenosti d. Určete pravděpodobnost, že jehla bude přesahovat okraj některého prkna.
Nápověda: Nakreslete obrázek a popište polohu jehly pomocí dvou náhodných proměnných (posun a úhel).

Řešení
TODO

Bonusové úlohy

Úloha 7 (Maximum z uniformních)
Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

a) Najděte distribuční funkci F_Y.

b) Odsud určete hustotu f_Y.

c) Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.

d) Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

Řešení a) $F_Y(x) = x^k$ na intervalu $[0, 1]$, 0 pro $x \leq 0$, 1 pro $x \geq 1$

b) 0 mimo $[0, 1]$, na $[0, 1]$ to je kx^{k-1}

c) $\int_0^1 kx^k \mathrm{d}x = \frac{k}{k+1}$

d) $F_Z(x) = 1 - (1-x)^k, f_Z(x) = k(1-x)^{k-1}, \mathbb{E}[Z] = \frac{1}{k+1}$ (opět na stenjých intervalech jako předtím)

Tahák

- *Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$
- *Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y).$
- *Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y.$
- *Nezávislost:* $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$
- Dvojné integrály jde prohazovat (Fubiniho věta):

$$\int_X \int_Y f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_Y \int_X f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

  Potřeba je, aby se nejednalo o „integrály typu $\infty - \infty$“, neboli $\int_X \int_Y |f(x,y)|$ musí být konečný.

- pro „rozumnou“ množinu A

$$P((X,Y) \in A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- *Cauchyho rozdělení:* $F_X(x) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}$, *nemá střední hodnotu.*

Domácí úkol 9

`https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/` Zadáno 17. 4. 2023

Pravděpodobnost a statistika 1 Odevzdejte do 24. 4. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

Úloha 1 (Doprava)
Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro na Malostranské (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor (X,Y) má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?

b) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?

c) S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?