8. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 5. 4. 2023 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/`

Exponenciální a normální rozdělení

Úloha 1 (*Obliviate*)
Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s+t | X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Už jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných čísel bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

Řešení
$P(X > s+t | X \geq s) = \frac{[X \geq s+t \wedge X \geq s]}{P[X \geq s} = \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})} = e^{-\lambda t} = 1-(1-e^{-\lambda t}) = P[X > t]$

Úloha 2 (Minimum z exponenciálních n.v.)
Nechť $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda_i)$ pro $i = 1, \dots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \dots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

Řešení
$P[M > t] = \prod_{i=1}^n P[X_i > t] = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{t \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i}$

Úloha 3 (Pravidlo tří sigma)
Nechť $Z \sim N(0, 1)$. Pomocí tabulky funkce Φ ověřte pravidlo 3σ, neboli spočtěte

- $P(|Z| \leq 1)$
- $P(|Z| \leq 2)$
- $P(|Z| \leq 3)$

Přepište, co to znamená pro n.v. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Řešení
TODO

Úloha 4 (Sněží)
Budeme modelovat množství sněhu, který bude na Silvestra v lyžarském areálu Ještěd, pomocí normálního rozdělení se střední hodnotou 40 (centimetrů) a směrodatnou odchylkou 10.

- Jaká je pravděpodobnost, že nám model určí zápornou hodnotu sněhové pokrývky?
- Jaká je pravděpodobnost, že sněhu napadne 50–70 cm?

Řešení
První část: $X \sim U(40, 100) \rightsquigarrow P(X < 0) = P(X \leq 0) = \Phi(\frac{0-40}{10}) = \Phi(-4) = 0.00003$
Druhá část: $P(50 \leq X \leq 70) = \Phi(\frac{70-40}{10}) - \Phi(\frac{50-40}{10}) = \Phi(3) - \Phi(1) = 0.15730$s

Práce s distribuční funkcí

Úloha 5 (Křup)
Metrový klacek rozlomíme na dva kusy lomem v uniformně náhodném bodě. Buď X délka delší části. Jaké rozdělení má X a jakou střední hodnotu?

Řešení
Uniformní na intervalu $[0.5, 1]$ – střední hodnota je 0.75.

Úloha 6 (Algoritmus ze dvou algoritmů)
Pro jistý problém máme k dispozici dva algoritmy, A a B. Algoritmus C spočívá v tom, že si náhodně vybereme, který z algoritmů A, B spustíme – A bude mít pravděpodobnost p, B pravděpodobnost $1-p$. Dobu běhu A, B, C chápeme jako náhodné veličiny, označíme je X, Y, Z.
(Čas na výběr algoritmu v Z počítat pro jednoduchost nemusíte.)

a) Vyjádřete $\mathbb{E}(Z)$ pomocí $\mathbb{E}(X)$ a $\mathbb{E}(Y)$.

b) Určete F_Z pomocí F_X, F_Y.

c) Pokud jsou X, Y spojité, určete f_Z pomocí f_X, f_Y.

Řešení
Střední hodnota je vážená
$F_Z(x) = pF_X(x) + (1-p)F_Y(x)$
$f_Z = pf_X + (1-p)f_Y$

Bonusové úlohy

K procvičení

Úloha 7 (HDD)
Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením.
(To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)

a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?

b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?

c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

Řešení
TODO

Úloha 8 (Minimum z uniformních n.v.)
Buď Y minimum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$. Spočtete $\mathbb{E}(Y)$.

Řešení
TODO

Tahák

rozdělení	$F(x)$	$f(x)$	$\mathbb{E}$	var
$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$1-e^{-\lambda x}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$N(0,1)$	$\Phi(x)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$	0	1
$N(\mu,\sigma^2)$	$\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	$\frac{1}{\sigma}\cdot\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$	μ	σ^2

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	0.00003	0.00135	0.02275	0.15866	0.500000	0.84135	0.97725	0.99865	0.99997

Domácí úkol 8

`https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/` Zadáno 5. 4. 2023
Pravděpodobnost a statistika 1 Odevzdejte do 12. 4. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

Úloha 1 (Zkouška)
Doba trvání ústní zkoušky má exponenciální rozdělení se střední hodnotou 20 minut. Přihlášeni jsou dva studenti, Adam na 10:00, Blanka na 10:20. Pokud se zkoušení Adama protáhne, zkoušení Blanky začne až bude Adam hotový, jinak začne přesně v 10:20.

a) Jaká je pravděpodobnost, že když Blanka přijde, bude Adam už vyzkoušený?

b) Jaká je střední hodnota času, po který bude muset Blanka čekat na dozkoušení Adama, pokud při jejím příchodu ještě Adam nebyl vyzkoušený?

c) Jaká je střední hodnota času, kdy bude Blanka vyzkoušená?

Úloha 2 (Skok daleký)
Frantovi jsme ve skoku do dálky naměřili 9 metrů, což překonává světový rekord o 5 cm. Při měření jsme se ovšem dopustili chyby s rozdělením $N(0, 0.01)$ (v metrech). Jaká je pravděpodobnost, že byl rekord skutečně překonán?