7. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 29. 3. 2023 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/`

Distribuční funkce a hustota

Úloha 1 (Pravděpodobnosti z distribuce)
Pro spojitou náhodnou veličinu X s distribuční funkci F vyjádřete:

a) $P(X \in (0,1])$ b) $P(X > 0)$ c) $P(X < 0)$ d) $P(X \in [0,1])$

Bonus: co kdyby X nebyla spojitá? Co by se změnilo?

Řešení a) $F(1) - F(0)$

b) $1 - F(0)$

c) $\lim_{x\to 0^-} F(x) = F(1) - F(0) + P[X = 0]$ ($F(0)$ pro spojitou)

d) $F(1) - \lim_{x\to 0^-} F(x)$ ($F(1) - F(0)$ pro spojitou)

Úloha 2 (A teď pro hustoty)
Vyřešte předchozí příklad pro hustotu f místo distribuční funkce.

Řešení a) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

b) $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$

c) $\lim_{x\to 0^-} \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$ (bez limity do nuly pro spojitou)

d) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ - ?

Úloha 3 (Distribuce z distribuce)
Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

a) $-X$ b) $X^+ = \max(0, X)$ c) $X^- = -\min(X, 0)$ d) $|X| = X^+ + X^-$

Řešení a) $F_{-X}(t) = 1 - F_X(t)$

b) $F_{X^+}(t) = \begin{cases} F_X(t) & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$

c) $F_{X^-}(t) = \begin{cases} 1 - F_X(-t) & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$

d) $F_X(t) - F_X(-t)$

Úloha 4 (Integrály jsou zde)
Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

b) Určete $\mathbb{E}(X)$.

c) Spočtěte distribuční funkci, F_X.

d) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y?

e) Určete hustotu náhodné veličiny Y. Pojmenujte její rozdělení.

Řešení a) $\int_1^\infty 1/t^2\mathrm{d}t = [\frac{-1}{t}]_1^\infty = 0 - (-1) = 1$

b) $\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty t \cdot 1/t^2\mathrm{d}t = [\ln t]_1^\infty = \infty$.

c) $F_X(x) = \int_1^x 1/t^2\mathrm{d}t = [\frac{-1}{t}]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$ pro $x \geq 1$ a 0 jinak.

d) $F_Y(y) = 1 - F_X(1/y) = 1 - (1 - y) = y$ pro $y \in (0,1)$, 1 pro $y \geq 1$ a 0 pro $y \leq 0$.

e) $Y \sim U(0,1) \rightsquigarrow f_Y(t) = 0$ pro $t \notin [0,1]$, $f_Y(t) = 1$ pro $t \in [0,1]$.

Modelování pomocí náhodných veličin

Úloha 5 (Pan Tau se vrací)
Pan Tau se chce podívat do Prahy a v uniformně náhodný čas se zhmotní na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Tau uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut?
b) Co když se pan Tau dostane na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

Řešení a) $3.75/24 = 5/32 = 0.15625$

b) $2.75/12 = 11/48 = 0.2291\overline{6}$

Úloha 6 (Krychličky)
Hrana krychle má náhodnou délku X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, a], a > 0$. Určete střední hodnotu a rozptyl *objemu* krychle.

Řešení
$\mathbb{E}[X^3] = \int_0^a t^3 \frac{1}{a} \mathrm{d}t = \frac{1}{a}[\frac{t^4}{4}]_0^a = \frac{a^3}{4}$, analogicky $\mathbb{E}[X^6] = \frac{a^6}{7}$, pak $\mathrm{var}(X) = \frac{a^6}{7} - \frac{a^6}{16} = \frac{9a^6}{112}$.

Úloha 7 (Čekáme na poště)
Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

a) Jaký je parametr λ, jaká je distribuční funkce?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

Řešení a) $\lambda = 1/4$

b) $1 - (1 - 1/e) = 1/e$

c) $1 - (e^{-5/4}) - (1 - e^{-3/4}) = e^{-3/4} - e^{-5/4} \approx 0.185$

Bonusové úlohy

K procvičení

Úloha 8 (Čekáme na nádraží)
Doba strávená čekáním na příjezd vlaku (v minutách) je náhodná veličina s hustotou:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/3} & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

a) Určete konstantu $c > 0$ aby f byla hustota.
b) Určete distribuční funkci F a načrtněte ji.
c) Jaká je pravděpodobnost, že na vlak budeme čekat déle než 5 minut?
d) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat mezi dvěma a pěti minutami?
e) Během čekání na vlak si projíždíte internet na mobilu, přičemž vám za to operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč, a pak spojitou sazbu 3 Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte. Určete rozdělení Y a spočtěte, s jakou pravděpodobností utratíte během čekání na vlak více než 35 korun.

Řešení
TODO

Úloha 9 (Trénink počítání)
Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0, 3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte

a) $P(1 \leq X \leq 2)$,
b) $P(X \leq Y)$,
c) $P(X \leq Z)$,
d) hustotní funkci f_X,
e) distribuční funkce F_Y a F_Z.

Řešení
TODO

Úloha 10 (Fyzika)
Plutonium-238 má poločas přeměny 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.

a) Jaké je λ?
b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají/používaly plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

Řešení
TODO

Tahák

- Distribuční funkce F_X je definována vztahem $F_X(x) = P(X \leq x)$.
  V některých případech je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X); takovým n.v. se říká *spojité.* Pak platí:
- $P(X \in A) = \int_A f_X(t)\mathrm{d}t$.
  Přitom $\int_A f(t)\mathrm{d}t$ definujeme jako $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(t) f(t)\mathrm{d}t$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny (1 uvnitř, 0 venku).
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t\ f_X(t)\mathrm{d}t$ a obecněji (spojité pravidlo naivního statistika):
$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ f_X(t)\mathrm{d}t.$$
- Stejně jako pro diskrétní n.v. je $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- *Uniformní rozdělení:* $X \sim U(a,b)$, $f_X(t) = 1/(b-a)$ pro $t \in [a,b]$, jinde 0.
- *Exponenciální rozdělení:* $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$, jinde 0
  (doba čekání na první černou kočku; spojitá analogie geometrického rozdělení).