

7. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 29. 3. 2023

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

Distribuční funkce a hustota

Úloha 1 (Pravděpodobnosti z distribuce)

Pro spojitou náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F vyjádřete:

- a) $P(X \in (0, 1])$ b) $P(X > 0)$ c) $P(X < 0)$ d) $P(X \in [0, 1])$

Bonus: co kdyby X nebyla spojitá? Co by se změnilo?

Úloha 2 (A teď pro hustoty)

Vyřešte předchozí příklad pro hustotu f místo distribuční funkce.

Úloha 3 (Distribuce z distribuce)

Nechť X je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin

- a) $-X$ b) $X^+ = \max(0, X)$ c) $X^- = -\min(X, 0)$ d) $|X| = X^+ + X^-$

Úloha 4 (Integrály jsou zde)

Buď X náhodná veličina s hustotou $f_X(t) = 1/t^2$ pro $t \geq 1$ a $f_X(t) = 0$ jinak.

- a) Ověřte, že se jedná o hustotu.
b) Určete $\mathbb{E}(X)$.
c) Spočtete distribuční funkci, F_X .
d) Buď $Y = 1/X$. Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny Y ?
e) Určete hustotu náhodné veličiny Y . Pojmenujte její rozdělení.

Modelování pomocí náhodných veličin

Úloha 5 (Pan Tau se vrací)

Pan Tau se chce podívat do Prahy a v uniformně náhodný čas se zhmotní na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

- a) Jaká je pravděpodobnost, že pan Tau uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut?
b) Co když se pan Tau dostane na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

Úloha 6 (Krychličky)

Hrana krychle má náhodnou délku X s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, a]$, $a > 0$. Určete střední hodnotu a rozptyl *objemu* krychle.

Úloha 7 (Čekáme na poště)

Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

- a) Jaký je parametr λ , jaká je distribuční funkce?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
c) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

Bonusové úlohy

K procvičení

Úloha 8 (Čekáme na nádraží)

Doba strávená čekáním na příjezd vlaku (v minutách) je náhodná veličina s hustotou:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/3} & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

- Určete konstantu $c > 0$ aby f byla hustota.
- Určete distribuční funkci F a načrtněte ji.
- Jaká je pravděpodobnost, že na vlak budeme čekat déle než 5 minut?
- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat mezi dvěma a pěti minutami?
- Během čekání na vlak si projíždíte internet na mobilu, přičemž vám za to operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč, a pak spojitou sazbu 3 Kč/min. Náhodná veličina Y udává, kolik peněz takto utratíte. Určete rozdělení Y a spočtete, s jakou pravděpodobností utratíte během čekání na vlak více než 35 korun.

Úloha 9 (Trénink počítání)

Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0, 3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtete

- $P(1 \leq X \leq 2)$,
- $P(X \leq Y)$,
- $P(X \leq Z)$,
- hustotní funkci f_X ,
- distribuční funkce F_Y a F_Z .

Úloha 10 (Fyzika)

Plutonium-238 má poločas přeměny 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.

- Jaké je λ ?
- Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
- Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
- Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají/používaly plutonium-238 jako zdroj energie. https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers)

Tahák

- Distribuční funkce F_X je definována vztahem $F_X(x) = P(X \leq x)$.
V některých případech je $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$ pro vhodnou nezápornou funkci f_X (hustotu X); takovým n.v. se říká *spojité*. Pak platí:
 - $P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$.
Přitom $\int_A f(t)dt$ definujeme jako $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(t)f(t)dt$, kde χ_A je charakteristická funkce množiny (1 uvnitř, 0 venku).
 - $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt$ a obecněji (spojité pravidlo naivního statistika):

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)dt.$$

- Stejně jako pro diskrétní n.v. je $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.
- Uniformní rozdělení*: $X \sim U(a, b)$, $f_X(t) = 1/(b - a)$ pro $t \in [a, b]$, jinde 0.
- Exponenciální rozdělení*: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ pro $t \geq 0$, jinde 0 (doba čekání na první černou kočku; spojitá analogie geometrického rozdělení).