

## 7. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 27. 3. 2023

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

### Distribuční funkce a hustota

**Úloha 1** (Pravděpodobnosti z distribuce)

Pro spojitou náhodnou veličinu  $X$  s distribuční funkcí  $F$  vyjádřete:

- a)  $P(X \in (0, 1])$                       b)  $P(X > 0)$                       c)  $P(X < 0)$                       d)  $P(X \in [0, 1])$

*Bonus:* co kdyby  $X$  nebyla spojitá? Co by se změnilo?

**Řešení** a)  $F(1) - F(0)$

b)  $1 - F(0)$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$  ( $F(0)$  pro spojitou)

d)  $F(1) - \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$  ( $F(1) - F(0)$  pro spojitou)

**Úloha 2** (A teď pro hustoty)

Vyřešte předchozí příklad pro hustotu  $f$  místo distribuční funkce.

**Řešení** a)  $\int_0^1 f(x) dx$

b)  $\int_0^\infty f(x) dx$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \int_{-\infty}^x f(t) dt$  (bez limity do nuly pro spojitou)

d)  $\int_0^1 f(x) dx - ?$

**Úloha 3** (Distribuce z distribuce)

Nechť  $X$  je spojitá náhodná veličina. Vyjádřete pomocí  $F_X$  distribuční funkci náhodných veličin

- a)  $-X$                       b)  $X^+ = \max(0, X)$                       c)  $X^- = -\min(X, 0)$                       d)  $|X| = X^+ + X^-$

**Řešení** a)  $F_{-X}(t) = 1 - F_X(t)$

b)  $F_{X^+}(t) = \begin{cases} F_X(t) & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$

c)  $F_{X^-}(t) = \begin{cases} 1 - F_X(-t) & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases}$

d)  $F_X(t) - F_X(-t)$

**Úloha 4** (Integrály jsou zde)

Buď  $X$  náhodná veličina s hustotou  $f_X(t) = 1/t^2$  pro  $t \geq 1$  a  $f_X(t) = 0$  jinak.

a) Ověřte, že se jedná o hustotu.

b) Určete  $\mathbb{E}(X)$ .

c) Spočítejte distribuční funkci,  $F_X$ .

d) Buď  $Y = 1/X$ . Jaká je distribuční funkce náhodné veličiny  $Y$ ?

e) Určete hustotu náhodné veličiny  $Y$ . Pojmenujte její rozdělení.

**Řešení** a)  $\int_1^\infty 1/t^2 dt = [-\frac{1}{t}]_1^\infty = 0 - (-1) = 1$

b)  $\mathbb{E}(X) = \int_1^\infty t \cdot 1/t^2 dt = [\ln t]_1^\infty = \infty$ .

c)  $F_X(x) = \int_1^x 1/t^2 dt = [-\frac{1}{t}]_1^x = 1 - \frac{1}{x}$  pro  $x \geq 1$  a 0 jinak.

d)  $F_Y(y) = 1 - F_X(1/y) = 1 - (1 - y) = y$  pro  $y \in (0, 1)$ , 1 pro  $y \geq 1$  a 0 pro  $y \leq 0$ .

e)  $Y \sim U(0, 1) \rightsquigarrow f_Y(t) = 0$  pro  $t \notin [0, 1]$ ,  $f_Y(t) = 1$  pro  $t \in [0, 1]$ .

## Modelování pomocí náhodných veličin

### Úloha 5 (Pan Tau se vrací)

Pan Tau se chce podívat do Prahy a v uniformně náhodný čas se zhmotní na Staroměstském náměstí. Každou celou hodinu od 9:00 do 23:00 se na orloji objevuje 12 figur apoštolů.

- Jaká je pravděpodobnost, že pan Tau uvidí apoštoly, aniž by čekal déle než 15 minut?
- Co když se pan Tau dostane na Staroměstské náměstí v uniformně náhodném čase po poledni, tj. 12:00–24:00?

**Řešení** a)  $3.75/24 = 5/32 = 0.15625$

b)  $2.75/12 = 11/48 = 0.2291\bar{6}$

### Úloha 6 (Krychličky)

Hrana krychle má náhodnou délku  $X$  s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, a]$ ,  $a > 0$ . Určete střední hodnotu a rozptyl *objemu* krychle.

### Řešení

TODO

### Úloha 7 (Čekáme na poště)

Předpokládejme, že u poštovní přepážky trvá vyřízení jednoho zákazníka čas, který má exponenciální rozdělení a střední hodnotu 4 minuty.

- Jaký je parametr  $\lambda$ , jaká je distribuční funkce?
- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat více než 4 minuty?
- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat něco mezi 3 a 5 minutami?

**Řešení** a)  $\lambda = 1/4$

b)  $1 - (1 - 1/e) = 1/e$

c)  $1 - (e^{-5/4}) - (1 - e^{-3/4}) = e^{-3/4} - e^{-5/4} \approx 0.185$

---

## Bonusové úlohy

## K procvičení

### Úloha 8 (Čekáme na nádraží)

Doba strávená čekáním na příjezd vlaku (v minutách) je náhodná veličina s hustotou:

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x/3} & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

- Určete konstantu  $c > 0$  aby  $f$  byla hustota.
- Určete distribuční funkci  $F$  a načrtněte ji.
- Jaká je pravděpodobnost, že na vlak budeme čekat déle než 5 minut?
- Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat mezi dvěma a pěti minutami?
- Během čekání na vlak si projíždíte internet na mobilu, přičemž vám za to operátor účtuje připojovací poplatek 5 Kč, a pak spojitou sazbu 3 Kč/min. Náhodná veličina  $Y$  udává, kolik peněz takto utratíte. Určete rozdělení  $Y$  a spočítejte, s jakou pravděpodobností utratíte během čekání na vlak více než 35 korun.

### Řešení

TODO

### Úloha 9 (Trénink počítání)

Nechť  $F_X$  je dána předpisem  $F_X(x) = x/3$  pro  $x \in [0, 3]$ ,  $F_X(x) = 0$  pro  $x < 0$  a  $F_X(x) = 1$  pro  $x > 3$ . Nechť  $Y = 1/X$  a  $Z = X^2$ . Spočítejte

- a)  $P(1 \leq X \leq 2)$ ,
- b)  $P(X \leq Y)$ ,
- c)  $P(X \leq Z)$ ,

- d) hustotní funkci  $f_X$ ,
- e) distribuční funkce  $F_Y$  a  $F_Z$ .

### Řešení

TODO

### Úloha 10 (Fyzika)

Plutonium-238 má poločas přeměny 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením  $Exp(\lambda)$ .

- a) Jaké je  $\lambda$ ?
- b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
- c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
- d) Kolik procent atomů se rozpadne po 50 letech? (Některé kardiostimulátory používají/používaly plutonium-238 jako zdroj energie. [https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear\\_powered\\_pacemakers](https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers))

### Řešení

TODO

### Tahák

- Distribuční funkce  $F_X$  je definována vztahem  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .  
V některých případech je  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)dt$  pro vhodnou nezápornou funkci  $f_X$  (hustotu  $X$ ); takovým n.v. se říká *spojité*. Pak platí:
- $P(X \in A) = \int_A f_X(t)dt$ .  
Přitom  $\int_A f(t)dt$  definujeme jako  $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(t)f(t)dt$ , kde  $\chi_A$  je charakteristická funkce množiny (1 uvnitř, 0 venku).
- $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt$  a obecněji (spojité pravidlo naivního statistika):

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t)dt.$$

- Stejně jako pro diskrétní n.v. je  $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ .
- *Uniformní rozdělení*:  $X \sim U(a, b)$ ,  $f_X(t) = 1/(b - a)$  pro  $t \in [a, b]$ , jinde 0.
- *Exponenciální rozdělení*:  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $F_X(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  pro  $t \geq 0$ , jinde 0 (doba čekání na první černou kočku; spojitá analogie geometrického rozdělení).