6. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 22. 3. 2023 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/`

Náhodné veličiny

Úloha 1 (Narozeninová party)
Jste ve skupině s dalšími 500 lidmi. Nechť X je počet lidí, kteří mají stejné narozeniny jako vy. (Narozeniny jednotlivých lidí jsou nezávislé rovnoměrné náhodné. Lidé narození 29. února mají vstup zakázán :))

a) Spočítejte $P[X = 1]$, tedy $p_X(1)$.

b) Jaké je rozdělení veličiny X?

c) Kolik je $\mathbb{E}(X)$?

d) Aproximujte $p_X(1)$ pomocí Poissonova rozdělení.

Úloha 2 (Pět klíčů)
Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře, X říká, kolikátým pokusem se nám to povede. Jaké rozdělení má X a kolik je $\mathbb{E}(X)$?

a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.

b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

c) Jak se výsledek změní, pokud jsou správně 2 klíče z 10?

Úloha 3 (Buďme uniformní)
Nechť X je uniformně náhodná mocnina dvojky z $\{2^a, 2^{a+1}, \ldots, 2^b\}$. Vyjádřete X pomocí uniformního rozdělení na množině $\{a, a+1, \ldots, b\}$. Určete $\mathbb{E}(X)$ a $\mathrm{var}(X)$.

Náhodné vektory

Úloha 4 (Měl s sebou jen balíček karet)
Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů (v balíčku jsou čtyři esa a čtyři králové). Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pravděpodobnostní funkce p_X, p_Y.

Úloha 5 (max(3d4))
Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).

a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $X = X_1$?

b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?

c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?

d) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X)$?

Nápověda: Určete napřed $P(Y \le k)$, $P(Z \le k)$.

Úloha 6 (Počítáme hody kostkou)
Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \ldots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.

a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. X_1, …, X_n.

b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

Úloha 7 (Součet Poissonů)
Nechť $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ a $Y \sim \mathrm{Pois}(\mu)$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Dokažte, že $X + Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda + \mu)$.

Bonusové úlohy

K procvičení

Úloha 8 (Pohled do budoucnosti)
Uvažme skupinu m manželských párů (tj. celkem $2m$ osob). Předpokládejme, že po deseti letech bude každý z těch $2m$ lidí stále naživu s pravděpodobností p, nezávisle na ostatních. Možnosti rozvodů apod. neuvažujeme, tj. páry jsou neměnné.
Označme L množinu lidí, kteří budou po deseti letech naživu a A jejich počet (tj. $A = |L|$). Dále buď B počet párů, kde budou naživu oba; tj. A, B jsou náhodné veličiny splňující $0 \le A \le 2m$ a $0 \le B \le m$. Pro každé $a = 0, \ldots, 2m$ chceme spočítat $\mathbb{E}(B|A = a)$.

a) Uvážíme jednoho konkrétního člověka. Jaká je pravděpodobnost, že bude po deseti letech naživu, pokud víme, že $A = a$? Jinými slovy, pokud ten člověk je x, jaká je $P(x \in L|A = a)$?

b) Uvážíme jeden konkrétní manželský pár. Jaká je pravděpodobnost, že budou oba naživu, pokud víme, že $A = a$?

c) Vyjádřete B jako součet m vhodných indikátorových n.v.

d) Spočítejte $\mathbb{E}(B|A = a)$. (Hint: Linearita střední hodnoty platí i pro podmíněnou střední hodnotu.)

e) Jaké je rozdělení n.v. A? (Buď ho pojmenujte, nebo napište pravděpodobnostní funkci, tj. určete $P(A = a)$.)

f) Pro zvolenou a-prvkovou množinu lidí M: jaká je pravděpodobnost, že je to přesně množina přeživších? Neboli kolik je $P(L = M)$? A kolik $P(L = M|A = a)$?

g) Pro $m = 10$ a $a = 4$ ověřte výsledek samplováním v libovolném programovacím jazyce.

Tahák

- *Sdružená pravděpodobnostní* funkce náhodného vektoru (X, Y) je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \wedge Y = y)$.
- Připomeňte si, jak z ní zjistit „jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y neboli *marginální rozdělení* – představujte si je na *okrajích* tabulky sdruženého rozdělení.
- *Poissonovo rozdělení:* $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$: $p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k!$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$.
- Konvoluční vzorec pro X, Y nezávislé: $P[X + Y = z] = \sum_{x \in \mathrm{Supp}(X)} P[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x]$.

Domácí úkol 6

https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/ Zadáno 22. 3. 2023
Pravděpodobnost a statistika 1 Odevzdejte do 29. 3. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

Úloha 1 (Šuplík)
V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme ze šuplíku 3 ponožky. Označme jako X počet vytáhnutých bílých ponožek a jako Y počet vytažených oranžových ponožek.

a) Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru (X, Y) a určete s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.

b) Jsou X a Y nezávislé?