

## 6. cvičení

### Náhodné veličiny

#### Úloha 1 (Narozeninová party)

Jste ve skupině s dalšími 500 lidmi. Nechť  $X$  je počet lidí, kteří mají stejné narozeniny jako vy. (Narozeniny jednotlivých lidí jsou nezávislé rovnoměrné náhodné. Lidé narození 29. února mají vstup zakázán :))

- Spočítejte  $P[X = 1]$ , tedy  $p_X(1)$ .
- Jaké je rozdělení veličiny  $X$ ?
- Kolik je  $\mathbb{E}(X)$ ?
- Aproximujte  $p_X(1)$  pomocí Poissonova rozdělení.

#### Úloha 2 (Pět klíčů)

Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře,  $X$  říká, kolikátým pokusem se nám to povede. Jaké rozdělení má  $X$  a kolik je  $\mathbb{E}(X)$ ?

- Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
- Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).
- Jak se výsledek změní, pokud jsou správně 2 klíče z 10?

#### Úloha 3 (Bud'me uniformní)

Nechť  $X$  je uniformně náhodná mocnina dvojky z  $\{2^a, 2^{a+1}, \dots, 2^b\}$ . Vyjádřete  $X$  pomocí uniformního rozdělení na množině  $\{a, a+1, \dots, b\}$ . Určete  $\mathbb{E}(X)$  a  $\text{var}(X)$ .

### Náhodné vektory

#### Úloha 4 (Měl s sebou jen balíček karet)

Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme  $X$  počet vytažených es,  $Y$  počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci  $p_{X,Y}$  a také marginální pravděpodobnostní funkce  $p_X, p_Y$ .

#### Úloha 5 (max(3d4))

Označme  $X_1, X_2, X_3$  výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, ..., 4).

- Jaká je pravděpodobnostní funkce  $X = X_1$ ?
- Jaká je pravděpodobnostní funkce  $Y = \max(X_1, X_2)$ ?
- Jaká je pravděpodobnostní funkce  $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$ ?
- O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli o kolik je vyšší  $\mathbb{E}(Z)$  než  $\mathbb{E}(X)$ ?

Nápověda: Určete napřed  $P(Y \leq k), P(Z \leq k)$ .

#### Úloha 6 (Počítáme hody kostkou)

Na kostce padne číslo  $i$  s pravděpodobností  $p_i$  pro  $i = 1, \dots, 6$ . Hodíme  $n$ -krát a označíme  $X_i$  počet hodů, kdy padlo  $i$ .

- Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v.  $X_1, \dots, X_n$ .
- Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v.  $X_i$ ?

#### Úloha 7 (Součet Poissonů)

Nechť  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  a  $Y \sim \text{Pois}(\mu)$  jsou nezávislé náhodné veličiny. Dokažte, že  $X + Y \sim \text{Pois}(\lambda + \mu)$ .

---

## Bonusové úlohy

### K procvičení

#### Úloha 8 (Pohled do budoucnosti)

Uvažme skupinu  $m$  manželských párů (tj. celkem  $2m$  osob). Předpokládejme, že po deseti letech bude každý z těch  $2m$  lidí stále naživu s pravděpodobností  $p$ , nezávisle na ostatních. Možnosti rozvodů apod. neuvažujeme, tj. páry jsou neměnné.

Označme  $L$  množinu lidí, kteří budou po deseti letech naživu a  $A$  jejich počet (tj.  $A = |L|$ ). Dále buď  $B$  počet párů, kde budou naživu oba; tj.  $A, B$  jsou náhodné veličiny splňující  $0 \leq A \leq 2m$  a  $0 \leq B \leq m$ . Pro každé  $a = 0, \dots, 2m$  chceme spočítat  $\mathbb{E}(B|A = a)$ .

- Uvážíme jednoho konkrétního člověka. Jaká je pravděpodobnost, že bude po deseti letech naživu, pokud víme, že  $A = a$ ? Jinými slovy, pokud ten člověk je  $x$ , jaká je  $P(x \in L|A = a)$ ?
- Uvážíme jeden konkrétní manželský pár. Jaká je pravděpodobnost, že budou oba naživu, pokud víme, že  $A = a$ ?
- Vyjádřete  $B$  jako součet  $m$  vhodných indikátorových n.v.
- Spočítejte  $\mathbb{E}(B|A = a)$ . (Hint: Linearita střední hodnoty platí i pro podmíněnou střední hodnotu.)
- Jaké je rozdělení n.v.  $A$ ? (Buď ho pojmenujte, nebo napište pravděpodobnostní funkci, tj. určete  $P(A = a)$ .)
- Pro zvolenou  $a$ -prvkovou množinu lidí  $M$ : jaká je pravděpodobnost, že je to přesně množina přeživších? Neboli kolik je  $P(L = M)$ ? A kolik  $P(L = M|A = a)$ ?
- Pro  $m = 10$  a  $a = 4$  ověřte výsledek sámplováním v libovolném programovacím jazyce.

### Tahák

- Sdružená pravděpodobnostní funkce* náhodného vektoru  $(X, Y)$  je definována vztahem  $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \wedge Y = y)$ .
- Připomeňte si, jak z ní zjistit „jednorozměrné funkce“  $p_X, p_Y$  neboli *marginální rozdělení* – představujte si je na *okrajích* tabulky sdruženého rozdělení.
- Poissonovo rozdělení*:  $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ :  $p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$ ,  $\mathbb{E}(X) = \lambda$ .
- Konvoluční vzorec pro  $X, Y$  nezávislé:  $P[X + Y = z] = \sum_{x \in \text{Supp}(X)} P[X = x] \cdot \Pr[Y = z - x]$ .

---

## Domácí úkol 6

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

Zadáno 20. 3. 2023

Pravděpodobnost a statistika 1

Odevzdejte do 27. 3. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

#### Úloha 1 (Šuplík)

V šuplíku je 6 ponožek: 2 bílé, 2 černé a 2 oranžové. Potmě náhodně vytáhneme ze šuplíku 3 ponožky. Označme jako  $X$  počet vytáhnutých bílých ponožek a jako  $Y$  počet vytažených oranžových ponožek.

- Napište tabulku rozdělení náhodného vektoru  $(X, Y)$  a určete s jakou pravděpodobností jsou mezi třemi vytaženými ponožkami alespoň dvě stejné.
- Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?