# 4. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 8. 3. 2023 https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/

## Náhodné veličiny a distribuce

**Úloha 1** (Která je tohle distribuce?)
Uvažme $m+n$ hodů spravedlivou šestistěnnou kostkou. Označme $X$ počet šestek z prvních $m$ hodů, $Y$ počet šestek z posledních $n$ hodů. Jaká je distribuce $X$, $Y$ a $X+Y$?

**Řešení**
Po řadě $\mathrm{Bin}(m, 1/6), \mathrm{Bin}(n, 1/6), \mathrm{Bin}(m+n, 1/6)$.

**Úloha 2** (Závislost a nezávislost)
Nechť $X = X_1 + \cdots + X_n$, kde pro každé $i$ je $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$. Ukažte, že pokud jsou veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé, tak $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ (definice nezávislých veličin je na druhé stránce).
Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen $X_i \sim \mathrm{Bern}(p)$), tak $X$ může mít i jiné rozdělení.

**Řešení**
První část je zjevná.
Druhá část: mějme všechna $X_i$ stejná (tj. $\forall i, j : X_i = X_j$), pak $X \sim n \cdot \mathrm{Bern}(p)$.

**Úloha 3** (Odpověď zní: Jigglypuff, pohled shora)
Na koš nezávisle hází $n$ hráčů basketbalu. Při každém hodu má každý z nich pravděpodobnost $p$, že se trefí, nezávisle na ostatních. Označme $X_i$ pořadí hodu, kterým se $i$-tý hráč poprvé trefí. Označme dále $X = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Rozmyslete si:

1. Jaká je distribuce $X_1$, $X_2$, …?
2. Jsou veličiny $X_1$, $X_2$, … nezávislé?
3. Jaká je distribuce $X$? (Pro začátek se může hodit začít s $n = 2$.)

**Řešení**

1. $\mathrm{Geom}(p)$
2. Ano (vlastně ze zadání).
3. $X \sim \mathrm{Geom}(1-(1-p)^n)$.

**Úloha 4** (Střední hodnota uniformního rozdělení)
Nechť náhodná veličina $X$ má uniformní rozdělení na množině $\{a, a+1, a+2, \ldots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Určete $\mathbb{E}[X]$.

**Řešení**
$\mathbb{E}[X] = \sum_{\ell=a}^{b} \cdot \frac{\ell}{b-a+1} = \frac{(a+b)(b-a+1)}{2\cdot(b-a+1)} = \frac{a+b}{2}$.

## Počítací část

**Úloha 5** (Oběma směry do kopce)
Filip má školu 2 km daleko od domu. Když prší (pravděpodobnost 0.6), tak jde pěšky rychlostí 5 km/h. Jinak jede na kole rychlostí 10 km/h.
Jaká je průměrná rychlost, kterou cestuje do školy? Jaký je průměrný čas, který cesta trvá?

**Řešení**
Rychlost: $0.6 \cdot 5 + 0.4 \cdot 10 = 7$ km/h
Čas: $0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.32$ h

**Úloha 6** (Dvakrát víc nebo nic)
V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U první z nich odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U druhé otázky je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměnu za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

1. Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne první otázkou?
2. Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne druhou otázkou?
3. Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu $p_1$, $p_2$ a odměny $m_1$, $m_2$, jak se má soutěžící rozhodnout?

**Řešení** 1. $0.8 \cdot 0.5 \cdot 3000 + 0.8 \cdot 0.5 \cdot 1000 = 1600$

2. $0.8 \cdot 0.5 \cdot 3000 + 0.2 \cdot 0.5 \cdot 2000 = 1400$
3. Začít s první: $p_1(p_2 \cdot (m_1 + m_2) + (1 - p_2)m_1)$, začít s druhou: $p_2(p_1 \cdot (m_1 + m_2) + (1 - p_1)m_2)$ – po úpravách je výhodnější začít s druhou otázkou, pokud $m_1 > m_2 \cdot \frac{(1-p_1)p_2}{p_1(1-p_2)}$.

**Úloha 7** (Hra v Sankt Petěrburgu)
Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v $n$-tém hodu, dostaneme odměnu $2^n$ rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

**Řešení**
Střední hodnota je nekonečno.

## Přehled diskrétních rozdělení

- *alternativní (Bernoulliho):*
  - Házíme mincí. Panna nebo orel?
  - $X \sim \text{Bern}(p)$: $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$
  - $\mathbb{E}(X) = p$
- *binomické:*
  - Házíme $n$ mincemi. Kolikrát padl orel?
  - $X \sim \text{Bin}(n, p)$: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pro $0 \leq k \leq n$
  - $\mathbb{E}(X) = np$
- *geometrické:*
  - Házíme mincí, dokud nepadne orel. Kolikrát hodíme? (neboli tak dlouho se chodí se džbánem pro vodu...)
  - $X \sim \text{Geom}(p)$: $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ pro $k \geq 1$
  - $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- *Poissonovo:*
  - Kolik černých koček přeběhne denně přes cestu?
  - $X \sim \text{Pois}(\lambda)$: $p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$

**Definice** (Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny)**.** Pro diskrétní náhodnou veličinu $X$ definujeme střední hodnotu $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Supp}(X)} x \cdot P[X = x]$ (má-li pravá strana smysl).

**Definice** (Nezávislost náhodných veličin)**.** Náhodné veličiny $X, Y$ jsou nezávislé, pokud pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{X = x\}$ a $\{Y = y\}$ nezávislé. (To je totéž jako $P[X = x, Y = y] = P[X = x] \cdot P[Y = y]$.)

**Definice** (Rozptyl)**.** Rozptyl náhodné veličiny $X$ je $\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$.

**Fakt** (Výpočet rozptylu)**.** $\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$.

---

# Domácí úkol 4

**Úloha 1** (Autobusy)
Cestou na výlet se skupina studentů rozdělila do pěti autobusů: je v nich po řadě 50, 55, 60, 65, 70 studentů. Vyberme uniformně náhodně a nezávisle jednoho studenta $s$ a jednoho řidiče autobusu $r$.
Označme jako $X$ náhodnou veličinu „počet studentů v autobuse, ve kterém je student $s$“ a $Y$ náhodnou veličinu „počet studentů v autobuse, ve kterém je řidič $r$“. Spočtěte $\mathbb{E}[X]$ a rozhodněte (zkuste nejdřív bez počítání), zda $\mathbb{E}[Y]$ je větší než $\mathbb{E}[X]$ či naopak (nebo zda jsou stejné).

**Úloha 2** (O zlodějství)
V kapse máte dvě padesátikoruny, jednu dvacetikorunu a jednu desetikorunu. Zloděj vám z kapsy náhodně vybere (a ukradne) dvě mince. Označme $X$ jako náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli. Určete rozdělení $X$ a spočtěte očekávanou ztrátu.
Zloděj si následně koupil kávu za 20 korun a potom mu zlodějský cech vezme čtyři pětiny z toho, co mu zbylo po koupi kávy. Označme jako $Y$ veličinu udávající částku, která zlodějovi po tom všem zůstane. Určete rozdělení a střední hodnotu $Y$.