

3. cvičení

Úloha -1 (Monty Hall)

V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

- moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;
- moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Budeme používat strategii, kdy dveře změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrájeme auto, ve variantách (a), (b).

Řešení

BÚNO volíme první dveře (je to jenom značení).

Značíme jevy A_1, A_2, A_3, O_1, O_2 jako Auto je za prvními dveřmi, i -té dveře byly Otevřeny.

$P[A_1|O_2] = \frac{P(O_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(O_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{P(O_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(O_2|A_2) \cdot P(A_2) + P(O_2|A_3) \cdot P(A_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$, druhá pravděpodobnost analogicky.

Jako níže: $P(A|K) = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$.

Druhá varianta: značíme jevy A jako vybrali jsme si prvně auto, K jako Monty Hall spadnul na kozu. Pak

$P(A|K) = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

Úloha 1 (Kos-tičky)

Máme tři normální šestistěnné hrací kostky a jednu speciální šestistěnnou kostku, kde jsou tři jedničky a tři dvojky. Vybereme uniformně náhodně jednu z kostek, hodíme a padne jednička. Jaká je pravděpodobnost, že jsme vybrali normální kostku?

Řešení

Jevy: N - výběr normální kostky, J - padla jednička. $P(N|J) = \frac{P(J|N) \cdot P(N)}{P(J)} = \frac{1/6 \cdot 3/4}{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$.

Úloha 2 (Spam or ham?)

Petr dostává hodně emailů, ale 80 % z nich jsou spamy. Jeho spamový filtr 90 % spamů správně označí, ale také 5 % řádných emailů označí jako spam.

- Kolik procent emailů bude označeno jako spamy?
- Kolik procent řádných emailů je mezi těmi, co jsou označeny jako spamy?
- Kolik procent spamů je mezi emaily, které testem prošly?

Řešení

Značíme jevy: O : „označený jako spam“, S : „je spam“.

- $P(O) = P(O|S) \cdot P(S) + P(O|\neg S) \cdot P(\neg S) = 0.9 \cdot 0.8 + 0.05 \cdot 0.2 = 0.73$
- $P(\neg S|O) = \frac{P(O|\neg S) \cdot P(\neg S)}{P(O)} = \frac{0.05 \cdot 0.2}{0.73} = \frac{1}{73}$
- $P(S|\neg O) = \frac{P(\neg O|S) \cdot P(S)}{P(\neg O)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.27} = \frac{8}{27}$

Nezávislé jevy

Úloha 3 (Nezávislost a doplňky)

Ukažte, že jsou-li jevy A, B nezávislé, pak jsou nezávislé i A, B^c a také A^c, B^c .

Řešení

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(B^c)$.

Dva doplňky analogicky pro $A = B^c, B = A$.

Úloha 4 (Nezávislost a disjunktnost)

Mohou být dva jevy nezávislé a zároveň disjunktní?

Řešení

Pokud A, B jsou disjunktní, pak $P(A \cap B) = 0$, a tedy pro nezávislost nutně musí platit $P(A)P(B) = 0$, což nastane jen tehdy, když $P(A) = 0 \vee P(B) = 0$. Tedy ano, můžou, ale jen tehdy, když alespoň jeden z těchto jevů je nemožný (má nulovou pravděpodobnost).

Úloha 5 (Součin pravděpodobností a nezávislost po dvou)

Najděte jevy A, B, C takové, že $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

Řešení

Liná verze: hážeme šestistěnnou kostkou, jevy jsou: A : „hodíme sedmičku“ (formálně $A = \{7\}$), $B = \{1, 3, 5\}$: „hodíme liché číslo“, $C = \{1, 2, 3\}$: „hodíme číslo ≤ 3 “. $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0$, $P(B \cap C) = 1/3 \neq \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$.

Rychlý pohled na náhodné veličiny

Úloha 6 (Pokusy)

Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po první trefě. Označme X celkový počet hodů.

1. Jaká je $P[X > k]$?
2. Jaká je distribuce X ? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X , tj. pro každé x určete $P[X = x]$.
3. Jaká je $P[X \geq 10 | X \geq 5]$?

Řešení 1. $P[X > k] = (1 - 1/10)^k$

2. $P[X = k] = (1 - \frac{1}{10})^{k-1} \frac{1}{10}$ – geometrické rozdělení.

3. $P[X \geq 10 | X \geq 5] = \frac{(1-1/10)^{10}}{(1-1/10)^5} = (1 - 1/10)^5$

Bonusové úlohy

Úloha 7 (Prosecutor's fallacy)

Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Řešení

Pravděpodobnosti nemusí být nezávislé, a tohle je pst dvou náhlých úmrtí za předpokladu, že je nevinná. Naopak, jaká je pst toho, že je nevinná, za předpokladu dvou úmrtí je těžké říct.

Na procvičení

Úloha 8 (Kouřové signály)

Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přeneše jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenášejí nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

1. Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?
2. Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?
3. Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?

Úlohu si můžete zjednodušit předpokladem, že 0 a 1 mají stejnou pravděpodobnost správného přenosu.

Řešení

TODO

Úloha 9 (Nemocnice na kraji města)

Na chorobu C máme dva testy, A a B . Test A má senzitivitu i specifitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

1. Spočtete pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Co to říká o užitečnosti obou testů?
2. Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

Řešení

TODO

Úloha 10 (Exit poll)

Ve volbách hlasují lidé pro dva kandidáty, A a B . Při odchodu z volební místnosti jsou voliči náhodně požádáni o účast v exit-poll. Předpokládejme, že kdo odpoví, odpoví popravdě koho volil, ale ne všichni se zúčastní. Označíme-li E množinu voličů, kteří se exit-pollu zúčastní, tak předpokládejme $P(E|A) = 0.7$ a $P(E|A^c) = 0.4$. Výsledky exit-pollu jsou 60 % pro A . Jaký je skutečný podíl lidí, kteří hlasovali pro A ?

Řešení

Tohle tedy znamená, že $P(A|E) = 0.6$, a nás by zajímalo zjistit $P(A), P(B)$ – budeme předpokládat $B = A^c$ pro názornost, dále označíme $a = P(A)$ pro zkrácení, navíc s $P(A)$ pracujeme jako s neznámou. Pak tedy $a = P(A) = P(A|E) \cdot P(E) = P(A|E) \cdot (P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B)) = P(A|E)P(E|A)a + P(A|E)P(E|B)(1 - a) \rightsquigarrow a = 0.42a + 0.24(1 - a) \rightsquigarrow P(A) = 12/41$.

Úloha 11 (Svědék)

Jirka je policista v New Vegas a vyšetřuje loupež. Lupič po krádeži skočil do taxíků a ujel. Svědek na místě Jirkovi řekl, že skočil do žlutého taxíku.

Jirka je ale zároveň obeznámený s Bayesovou větou, a tak by ho zajímalo, jak moc může výpovědi věřit. Konkrétně ví, že v New Vegas je 80 % taxíků černých a zbylých 20 % je žlutých. Zároveň ví (z kurzů kriminalistiky), že svědek dobře identifikuje a zapamatuje si barvu taxíku s pravděpodobností 80 %. Jaká je pravděpodobnost toho, že svědek vypověděl pravdivě?

Řešení

Dva jevy: T - taxík byl žlutý, V - vypověděl žlutou. $P(T|V) = \frac{P(V|T) \cdot P(T)}{P(V)} = \frac{0.8 \cdot 0.2}{0.8 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.8} = 1/2$.

Úloha 12 (Po dvou nezávislé, ale ne nezávislé)

Najděte jevy A, B, C takové, že jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Řešení

Prostor: dvě mince. Jevy: A : na první minci orel, B : na druhé minci orel, C : na obou mincích dohromady jeden orel.

Snadno se spočítá, že $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$, $P(A \cap B \cap C) = 0$.

Domácí úkol 3

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

Pravděpodobnost a statistika 1

Zadáno 27. 2. 2023

Odevzdejte do 6. 3. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

Úloha 1 (Truhla)

V truhle je sto mincí. Z nich je 99 normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Řekneme našemu kamarádovi, aby pomocí Uniformně Náhodného VytahovačeTM jednu minci z truhly vytáhl a šestkrát s ní hodil. Zjistili jsme, že nám šestkrát padnul orel. Jaká je pravděpodobnost, že kamarád vytáhnul minci se dvěma orly?