

2. cvičení

Užitečné vztahy pro podmíněnou pravděpodobnost

Řetězové pravidlo: Pokud $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Rozbor případů: Pokud $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i),$$

přičemž sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0.

Nezávislost: $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow (P(A|B) = P(A) \vee P(B) = 0)$

Úloha -1 (Hey Brother)

Král země má právě jednoho sourozence. Jaká je pravděpodobnost, že král má bratra? (Ujasněte si všechny předpoklady, které používáte! Co jsou elementární jevy?)

Úloha 1 (Korelujeme?)

Jaký je vztah tvrzení $P(A|B) > P(A)$ a $P(B|A) > P(B)$?

Řešení

Z definice $P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) \rightsquigarrow \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{P(B|A)}{P(B)}$.

Úloha 2 (Kouzlíme s kartami)

Vytáhneme si tři karty z běžného balíčku 32 karet. Označme A_i jev i -tá karta je srdcová. Spočtete $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Řešení

Řetězové pravidlo: $P(A_1) = 1/4, P(A_2|A_1) = 7/31, P(A_3|A_2 \cap A_1) = 1/5 \rightsquigarrow P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{7}{620}$

Úloha 3 (Dvě předpovědi)

Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé a mají jen dva výsledky: bude pršet, nebude pršet. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, hodíme si spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

Řešení

Rozhodneme se správně, pokud buď jsou obě úspěšné, nebo je právě jedna úspěšná a hod dopadne dobře. Takže $P[\text{úspěch}] = p^2 + \frac{2(1-p)p}{2} = p(p + 1 - p) = p$.

Intuice: Michal Jireš našel pěkné intuitivní vysvětlení: Pokud se předpovědi neshodují, pak hod mincí také znamená, že si náhodně vyberu, které z těch dvou protirečících si předpovědí věřím. Ale to mohu udělat i v případě, že se shodují. Takže ať už se předpovědi shodly nebo neshodly, já si náhodně vyberu jednu předpověď a té věřím. Tím pádem pravděpodobnost, že uhodnu správně počasí, je rovna pravděpodobnosti, že jedna konkrétní předpověď uspěla, což je přesně p .

Úloha 4 (Thopter Depths)

Hrajeme karetní hru, ve které všichni hrají tři typy balíčků: control hraje 45 % hráčů, aggro hraje 26 % hráčů a midrange hraje 29 % hráčů. Sestavili jsme nový combo balík, a zjistili jsme, že proti controlu máme šanci na výhru 40 %, proti aggru 55 % a proti midrange 75 %. Jaká je šance, že vyhrajeme první hru? (Předpokládejme, že soupeře vybíráme náhodně.)

Řešení

Věta o úplné psti: jevy V výhra, C, A, M proti komu hraju: $P(V) = P(V|C) \cdot P(C) + P(V|A) \cdot P(A) + P(V|M) \cdot P(M) = 0.4 \cdot 0.45 + 0.55 \cdot 0.26 + 0.75 \cdot 0.29 = 0.5405$.

Úloha 5 (Monty Hall)

V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jednu dveř, ale než je otevřeme, moderátor otevře jednu ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

- moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;
- moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Budeme používat strategii, kdy dveře změním. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhraje auto, ve variantách (a), (b).

Řešení

BÚNO volíme první dveř (je to jenom značení).

Značíme jevy A_1, A_2, A_3, O_1, O_2 jako Auto je za prvními dveřmi, i -té dveře byly Otevřeny.

$P[A_1|O_2] = \frac{P(O_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(O_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{P(O_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(O_2|A_2) \cdot P(A_2) + P(O_2|A_3) \cdot P(A_3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3}} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$, druhá pravděpodobnost analogicky.

Jako níže: $P(A|K) = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$.

Druhá varianta: značíme jevy A jako vybrali jsme si prvně auto, K jako Monty Hall spadnul na kozu. Pak

$P(A|K) = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3}} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

Úloha 6 (Mincovní převaha)

Alice má $n + 1$ mincí, Bob jich má n . Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Ukažte, že pravděpodobnost, že Alici padla panna vícekrát, je $1/2$. (Návod: Představte si, že Alice si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)

Řešení

Nejdříve hodíme n mincemi. Pak je buď s pravděpodobností p Alice ve vedení, nebo je s pravděpodobností p Bob ve vedení, a nebo s pravděpodobností $1 - 2p$ mají stejně. Potom ještě hodíme poslední mincí – má pravděpodobnost $1/2$, že hodí pannu. Tedy celkově vyhraje s pravděpodobností $p + \frac{1-2p}{2} = 1/2$.

Úloha 7 (Pořád lepší než ruská ruleta)

V krabici je b bílých a c černých míčků. Dva hráči střídavě tahají míčky, první, kdo vytáhne bílý míček, prohrál. Jaká je pravděpodobnost, že prohraje první hráč? Najděte rekurenci.

Řešení

První hráč prohraje s pravděpodobností $\frac{b}{b+c} + \frac{c(c-1)b}{(b+c)(b+c-1)(b+c-2)} + \dots$ Rekurence: $p(b, b) = 1$, $p(b, b+c) = \frac{b}{b+c} + \frac{c}{b+c} \cdot (1 - p(b, b+c-1))$.

Bonusové úlohy

Úloha 8 (Prosecutor's fallacy)

Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Řešení

Pravděpodobnosti nemusí být nezávislé, a tohle je pst dvou náhlých úmrtí za předpokladu, že je nevinná. Naopak, jaká je pst toho, že je nevinná, za předpokladu dvou úmrtí je těžké říct.

Úloha 9 (Simpsonův paradox)

V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepi). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.

- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

Řešení • bílá krabice: $2/8$, černá krabice: $1/5$

- bílý sáček: $2/2$, černý sáček: $4/5$
- bílé dohromady: $4/10$, černé dohromady: $5/10$.

Na procvičení

Úloha 10 (Obměňujeme téma)

Logická formule $A \implies B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \implies \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

1. Ukažte, že pokud $P(B|A) = 1$, tak také $P(A^c|B^c) = 1$.
2. Ukažte, že je však možné, aby $P(B|A) \doteq 1$, ale $P(A^c|B^c) \doteq 0$.

Úloha 11 (Urna)

V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, ...?

Domácí úkol 2

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>
Pravděpodobnost a statistika 1

Zadáno 22. 2. 2023

Odevzdejte do 1. 3. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

Úloha 1 (Spojené nádoby)

Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, a tak dále. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?

(*Hint: zkuste nejdřív případ $k = 2$.*)

Úloha 2 (Zapomnětlivci)

Dva spolubydlící Ňok a Tete, studenti matfyzu, jsou zapomnětliví a občas někde nechají svoje mobily. Konkrétně Ňok si vždycky svůj telefon z domova vezme, ale Tete jej doma zapomene s pravděpodobností $1/4$. Po přednášce nebo cvičení jsou tak unavení, že každý svůj telefon v učebně zapomene s pravděpodobností $1/3$. Po návštěvě dvou přednášek jdou domů.

Všechny „možnosti“ jak telefon zapomenout jsou na sobě „nezávislé“ (přesněji: pravděpodobnost, že student někde mobil zapomene, pokud jej má stále u sebe je dle zadání, pravděpodobnost, že jej někde zapomene, pokud ho už zvládnul ztratit, je 0).

Určete pravděpodobnost, že

1. po návratu domů mají oba své mobily,
2. po návratu domů mají jenom jeden mobil,
3. Tete zapomněla svůj mobil za podmínky, že po návratu domů mají jenom jeden telefon.

Pozor: Tete může svůj telefon zapomenout doma.