2. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 22. 2. 2023 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/`

Užitečné vztahy pro podmíněnou pravděpodobnost

Řetězové pravidlo: Pokud $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ a $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, tak

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Rozbor případů: Pokud $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ je rozklad Ω a $A \in \mathcal{F}$, tak

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i),$$

přičemž sčítance s $P(B_i) = 0$ považujeme za 0.
Nezávislost: $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow (P(A|B) = P(A) \vee P(B) = 0)$

Úloha 1 (Korelujeme?)
Jaký je vztah tvrzení $P(A|B) > P(A)$ a $P(B|A) > P(B)$?

Úloha 2 (Kouzlíme s kartami)
Vytáhneme si tři karty z běžného balíčku 32 karet. Označme A_i jev i-tá karta je srdcová. Spočtěte $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Úloha 3 (Dvě předpovědi)
Pro plánování výletu do Krkonoš používáme českou a polskou předpověď počasí. Předpokládejme, že každá z nich má tutéž pravděpodobnost úspěchu $p \in [0, 1]$, obě předpovědi jsou nezávislé a mají jen dva výsledky: bude pršet, nebude pršet. Používáme je takto: pokud se shodují, věříme jim, pokud ne, hodíme si spravedlivou mincí. Jaká je pravděpodobnost, že se rozhodneme správně?

Úloha 4 (Thopter Depths)
Hrajeme karetní hru, ve které všichni hrají tři typy balíčků: control hraje 45 % hráčů, aggro hraje 26 % hráčů a midrange hraje 29 % hráčů. Sestavili jsme nový balík, a zjistili jsme, že proti controlu máme šanci na výhru 40 %, proti aggru 55 % a proti midrange 75 %. Jaká je šance, že vyhrajeme první hru? (Předpokládejme, že soupeře vybíráme náhodně.)

Úloha 5 (Monty Hall)
V soutěžní hře stojíme na podiu před třemi dveřmi. Za dvojemi je koza (tu nechceme, moc žere), za zbylými auto (to chceme, i když vlastně také moc žere). Vybereme si jedny dveře, ale než je otevřeme, moderátor otevře jedny ze zbylých dveří, ukáže za nimi kozu, a nabídne nám, že můžeme svoji volbu změnit. Máme to udělat? Pomůže to? Uvědomte si, že zadání má (minimálně) následující dvě varianty:

(a) moderátor ví, kde je auto, a tomu přizpůsobí, které dveře otevře;

(b) moderátor si hodí korunou, které dveře otevřít. Kdyby odhalil auto, tak bychom asi prohráli, ale to se zrovna nestalo.

Budeme používat strategii, kdy dveře změníme. Spočítejte pravděpodobnost, že vyhrajeme auto, ve variantách (a), (b).

Úloha 6 (Mincovní převaha)
Alice má $n + 1$ mincí, Bob jich má n. Oba hodí všemi svými mincemi a spočítají, komu padne kolikrát panna. Ukažte, že pravděpodobnost, že Alici padla panna vícekrát, je 1/2. *(Návod: Představte si, že Alice si dá jednu minci stranou a napřed spočítá těch n ostatních, teprve pak připočte tu poslední.)*

Úloha 7 (Pořád lepší než ruská ruleta)
V krabici je b bílých a c černých míčků. Dva hráči střídavě tahají míčky, první, kdo vytáhne bílý míček, prohrál. Jaká je pravděpodobnost, že prohraje první hráč? Najděte rekurenci.

Bonusové úlohy

Úloha 8 (Prosecutor's fallacy)
Paní C. umřely dvě děti krátce po narození. Je obžalovaná za dvojnásobnou vraždu. Žalobce argumentuje takto: Pravděpodobnost syndromu náhlého úmrtí kojenců je $1/8500$. Takže pravděpodobnost dvou takových jevů je $1/8500^2$. Tudíž pravděpodobnost, že paní C. je nevinná, je $1/8500^2$, což je hodně málo. Formulujte argumenty žalobce v řeči pravděpodobnosti a nalezněte v nich dvě chyby.

Úloha 9 (Simpsonův paradox)
V této úloze budeme mít bonbony dvou druhů: dobré červené a nedobré zelené. Bonbony ale vybíráme z nádoby poslepu (nebo jsme barvoslepí). Rozhodněte, zda se může stát následující podivnost:

- Při vytahování bonbonu z bílé krabice máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černé krabice.
- Při vytahování bonbonu z bílého sáčku máme vyšší pravděpodobnost, že vytáhneme dobrý bonbon, než z černého sáčku.
- Pokud přesypeme bonbony z bílého sáčku do bílé krabice (a z černého do černé krabice), tak budeme mít lepší pravděpodobnost vytažení dobrého bonbonu v černé krabici.

Na procvičení

Úloha 10 (Obměňujeme téma)
Logická formule $A \implies B$ je ekvivalentní obměně $\neg B \implies \neg A$. Budeme se zabývat analogiemi zahrnujícími pravděpodobnost.

1. Ukažte, že pokud $P(B|A) = 1$, tak také $P(A^c|B^c) = 1$.
2. Ukažte, že je však možné, aby $P(B|A) \doteq 1$, ale $P(A^c|B^c) \doteq 0$.

Úloha 11 (Urna)
V urně je a černých a b bílých míčků. Postupně z ní (bez vracení) taháme míčky. Jaká je pravděpodobnost, že první vytažený míček je černý? Druhý, třetí, ...?

Domácí úkol 2

`https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/` Zadáno 22. 2. 2023
Pravděpodobnost a statistika 1 Odevzdejte do 1. 3. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

Úloha 1 (Spojené nádoby)
Máme k nádob, v každé z nich a bílých a b černých míčků. Z první vybereme náhodný míček, vhodíme do druhé. Pak z ní vybereme náhodný míček, vhodíme do třetí, a tak dále. Jaká je pravděpodobnost, že z poslední nádoby vytáhneme bílý míček?
(Hint: zkuste nejdřív případ $k = 2$.)

Úloha 2 (Zapomnětlivci)
Dva spolubydlící Ňok a Tete, studenti matfyzu, jsou zapomnětliví a občas někde nechají svoje mobily. Konkrétně Ňok si vždycky svůj telefon z domova vezme, ale Tete jej doma zapomene s pravděpodobností $1/4$. Po přednášce nebo cvičení jsou tak unavení, že každý svůj telefon v učebně zapomene s pravděpodobností $1/3$. Po návštěvě dvou přednášek jdou domů.
Všechny „možnosti" jak telefon zapomenout jsou na sobě „nezávislé" (přesněji: pravděpodobnost, že student někde mobil zapomene, pokud jej má stále u sebe je dle zadání, pravděpodobnost, že jej někde zapomene, pokud ho už zvládnul ztratit, je 0).
Určete pravděpodobnost, že

1. po návratu domů mají oba své mobily,
2. po návratu domů mají jenom jeden mobil,
3. Tete zapomněla svůj mobil za podmínky, že po návratu domů mají jenom jeden telefon.

Pozor: Tete může svůj telefon *zapomenout doma.*