11. cvičení

Aplikace nerovností a CLV

Úloha 1 (Pošta)
Na poště v Jindřišské v průměru za den zpracují 10 000 dopisů denně. (Tj. střední hodnota je 10 000.)

a) Co nám Markovova nerovnost říká o pravděpodobnosti, že zítra bude poště muset zpracovat aspoň 15 tisíc dopisů?

b) Předpokládejme navíc, že rozptyl $\sigma^2 = 2000$. Co nám říká Čebyševova nerovnost o pravděpodobnosti toho, že pošta bude muset zítra zvládnout mezi 8000 a 12000 dopisy?

c) Můžeme nějak použít Čebyševovu nerovnost k tomu, abychom určili pravděpodobnost toho, že pošta bude muset zítra zpracovat aspoň 15 tisíc dopisů?

Úloha 2 (Statistika výšky)
Statistik chce odhadnout průměrnou výšku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků $X_1, \ldots, X_n$, které vybíráme uniformně náhodně ze všech možnych lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka S_n byla nejvýše 1 cm?

b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že pravděpodobnost, že S_n se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99 %?

Úloha 3 (Rozdíl počtu hodů mincí)
Označme $S = \sum_{k=0}^{30} \binom{100}{k}$. Označme dále $X = \sum_{i=1}^{100} X_i$, kde X_i je ± 1 s pravděpodobností 1/2 a veličiny X_1, $\ldots$, X_n jsou nezávislé.

a) Spočítejte $P(X = k)$ pro každé k.

b) Vyjádřete S pomocí pravděpodobnosti vhodného výroku o X.

c) Použijte Čebyševovu nerovnost a CLV na odhad této pravděpodobnosti.

d) Vyčíslete S vhodným softwarem a srovnejte.

Úloha 4 (Počítání obsahu kruhu náhodným samplováním)
Vygenerujeme náhodný bod v jednotkovém čtverci (obě souřadnice budou mít rozdělení $U(0, 1)$). Označíme X_i indikátor jevu „i-tý bod leží ve vepsaném kruhu“.

a) Určete $\mathbb{E}(X_i)$, $\mathrm{var}(X_i)$.

b) Položte $S_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Určete $\mathbb{E}(S_n)$ a $\mathrm{var}(S_n)$.

c) Všimněte si, že lze počítat S_n z S_{n-1}, X_n a n (nižší nároky na paměť).

d) Pro jaké n čekáte, že dostaneme výsledek správně na jedno desetinné místo? Na dvě, tři, …?

Spojité vektory

Úloha 5 (Rozlomit do trojúhelníka)
Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.

b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.

c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

Tahák

- *Markovova nerovnost:* $P(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)/a$ pro $X \geq 0$, $a > 0$.
- *Čebyševova nerovnost:* $P(|X - \mu| \geq a\sigma) \leq 1/a^2$ pro $\mu = \mathbb{E}(X)$, $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$.
- *Černovova nerovnost:* $P(X \geq t) = P(X \leq -t) \leq e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$ pro $X = X_1, \ldots, X_n$, kde všechna $X_i = \pm 1$ jsou n.n.v. a $\sigma^2 = \mathrm{var}(X)$.
- *Centrální limitní věta:* Pro $X_1, X_2, \ldots$ stejně rozdělené n.v. s konečným μ a σ, $Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ platí $Y_n \xrightarrow{d} \Phi$.
- Na počítání $\Phi(x)$: `https://t.ly/JRQ2`

Domácí úkol 11

`https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/` Zadáno 15. 5. 2023

Pravděpodobnost a statistika 1 Odevzdejte do 22. 5. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

Úloha 1 (Mince)
Máme minci, na které padne orel s pravděpodobností 1/10. Hodíme s ní 200x. Použijte Markovovu nerovnost abyste shora odhadli pravděpodobnost, že na minci padne aspoň 120x orel.
Pak tento odhad vylepšete pomocí Čebyševa.