10. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 19. 4. 2023 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/`

Konvoluce

Úloha 1 (Sčítáme náhodné veličiny)
Buďte $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

a) Jaké je rozdělení $X + Y$?

b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Řešení a) $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x)F_Y(z-x)\mathrm{d}x = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda(z-x)}\mathrm{d}x = \lambda^2 e^{-\lambda z}\int_0^z e^{(\lambda-\lambda)z}\mathrm{d}x = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$

b) TODO

Úloha 2 (Součet podruhé)
Buďte $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodně veličiny.

a) Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.

b) Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.

c) Jak výsledek ověřit samplováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Pythonu, nebo jen popište, co byste dělali.)

Řešení a) evidentně 0 mimo $[0, 2]$, pro $z \in [0, 1]$: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)F_Y(z-t)\mathrm{d}t = \int_0^z 1 dx = z$, pro $z \in [1, 2]$: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)F_Y(z-t)\mathrm{d}t = \int_{z-1}^{z} 1 dx = 2 - z$

b) Zase konvoluce po částech, mimo $[0, 3]$ evidentně 0, na $[0, 1] : f_{X+Y+Z}(w) = w^2/2$,na $[1, 2] : f_{X+Y+Z}(w) = -w^2 + 3w - 3/2$, na $[2, 3] : f_{X+Y+Z}(w) = (w-3)^2/2$.

c) prostě budeme samplovat

Podmíněná hustota

Úloha 3 (Určení podmíněné hustoty)
Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

a) Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

b) Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

Řešení
Marginální hustoty: $f_X(x) = e^{-x}, f_Y(y) = ye^{-y}$ na očekávaných intervalech

a) $f_{X|Y} = \frac{1}{y}$ pro $y > x > 0$

b) $f_{Y|X} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}$ pro $y > x > 0$.

Úloha 4 (Lámání klacku)
Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y. V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X.

a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.

b) Najděte marginální hustotu f_X.

c) Pomocí f_X spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

Řešení a) $f_{X|Y}(x) = \frac{1}{y}$ na $[0, y]$, $f_Y(y) = 1$ na $[0, 1] \rightsquigarrow f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y}$ pro $0 < x < y < 1$.

b) $f_X(x) = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\log(x)$

c) $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 -x \log(x) \mathrm{d}x = 1/4$

Úloha 5 (Rozlomit do trojúhelníka)
Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

a) Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.

b) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.

c) Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

Řešení
Máme $X + Y + Z = 1$, potřebujeme trojúhelníkovou nerovnost: $X + Y \geq Z, X + Z \geq Y, Y + Z \geq X$, speciálně tedy musí platít $1 - X \geq X$, a tedy $X \leq 1/2$, pro oba další analogicky.

a) Problém je, když se oba řezy trefí do stejné poloviny, nebo když vzdálenost mezi řezy je aspoň $1/2$: tedy $P[\triangle] = 1-(1/4+1/4+1/4) = 1/4$ – alternativně se dá nakreslit prostor daný X, Y, a případy odpovídají částem prostoru.

b) $\int_0^{1/2} \int_{1/2-x}^{1/2} \frac{1}{1-x} dydx = \log(2) - 1/2 \approx 0.193$ (tj. x musí být maximálně $1/2$, a y musí být aspoň $1/2 - x$, aby z nebylo velké, a zároveň musí být maximálně $1/2$).

c) $\int_0^{1/2} \int_{1/2-x}^{1/2} \frac{2}{1-x} dydx = 2(\log(2) - 1/2)$ (hustota je dvojnásobná, protože $x, 1 - x$ odpovídají témuž; alternativně jde říct, že nejdříve vezmeme uniformně hodnotu z intervalu $[0, 1/2]$ jako tu menší, a potom pracujeme se zbytkem "jakoby v pravé ruce").

Spojité vektory

Úloha 6 (Náhodný bod)
Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

b) Najděte marginální hustotu f_Y a spočtěte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.

c) Pro kontrolu spočtěte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

Řešení a) $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{2}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

b) $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y^2 > 1 \\ \frac{2 \cdot \sqrt{1-y^2}}{\pi} & y^2 \leq 1 \end{cases}$, $\mathbb{E}[Y] = \int_{-1}^1 \frac{2 \cdot y \sqrt{1-y^2}}{\pi} dy = 0$, prim. fce je $\frac{-2(1-y^2)^{3/2}}{3\pi}$

Úloha 7 (Maximum z uniformních)
Buď Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

a) Najděte distribuční funkci F_Y.

b) Odsud určete hustotu f_Y.

c) Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.

d) Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

Řešení a) $F_Y(x) = x^k$ na intervalu $[0,1]$, 0 pro $x \leq 0$, 1 pro $x \geq 1$

b) 0 mimo $[0,1]$, na $[0,1]$ to je kx^{k-1}

c) $\int_0^1 kx^k \mathrm{d}x = \frac{k}{k+1}$

d) $F_Z(x) = 1 - (1-x)^k, f_Z(x) = k(1-x)^{k-1}, \mathbb{E}[Z] = \frac{1}{k+1}$ (opět na stenjých intervalech jako předtím)

Tahák

- *Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}s.$
- *Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x,y).$
- *Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\mathrm{d}y.$
- *Nezávislost:* $F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$
- *Konvoluce:* Pokud $A = X + Y$, máme $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)\mathrm{d}t.$
- *Podmíněná hustota:* pro n.v. X, Y: $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, pokud $f_Y(y) > 0$, jinak nedefinujeme.
- *Podmíněná hustota a distribuční funkce jevem:* pro jev B a n.v. X: $F_{X|B}(x) := P[X \leq x|B] \rightsquigarrow f_{X|B}.$

Domácí úkol 10

https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/ Zadáno 19. 4. 2023

Pravděpodobnost a statistika 1 Odevzdejte do 26. 4. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

Úloha 1 (Trojúhelník)
Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0,0]$, $[0,1]$ a $[1,0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

a) Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.

b) Najděte marginální hustotu f_Y.

c) Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.

d) Spočtěte $\mathbb{E}(X|Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočtěte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).

e) Spočtěte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.