

# 10. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 19. 4. 2023

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

## Konvoluce

**Úloha 1** (Sčítáme náhodné veličiny)

Bud'te  $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$  nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení  $X + Y$ ?
- Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ?

**Úloha 2** (Součet podruhé)

Bud'te  $X, Y, Z \sim U(0, 1)$  nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení  $X + Y$ ? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu  $[0, 1]$ .
- Jak výsledek ověřit smplováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Pythonu, nebo jen popište, co byste dělali.)

## Podmíněná hustota

**Úloha 3** (Určení podmíněné hustoty)

Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Určete podmíněnou hustotu  $f_{X|Y}$ .
- Určete podmíněnou hustotu  $f_{Y|X}$ .

**Úloha 4** (Lámání klacku)

Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme  $Y$ . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme  $X$ .

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ . Může vám pomoci podmíněná hustota  $f_{X|Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_X$ .
- Pomocí  $f_X$  spočítejte  $\mathbb{E}(X)$ .

**Úloha 5** (Rozlomit do trojúhelníka)

Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

- Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

## Spojité vektory

### Úloha 6 (Náhodný bod)

Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočtěte pomocí ní  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Pro kontrolu spočtěte  $\mathbb{E}(Y)$  přímo (pomocí pravidla LOTUS).

### Úloha 7 (Maximum z uniformních)

Bud'  $Y$  maximum z  $k$  uniformně náhodných čísel z intervalu  $[0, 1]$ .

- Najděte distribuční funkci  $F_Y$ .
- Odsud určete hustotu  $f_Y$ .
- Spočítejte  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

## Tahák

- Sdružené rozdělení:*  $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$ .
- Sdružená hustota:*  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$ .
- Marginální hustota:*  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$ .
- Nezávislost:*  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ .
- Konvoluce:* Pokud  $A = X + Y$ , máme  $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$ .
- Podmíněná hustota:* pro n.v.  $X, Y$ :  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ , pokud  $f_Y(y) > 0$ , jinak nedefinujeme.
- Podmíněná hustota a distribuční funkce jevem:* pro jev  $B$  a n.v.  $X$ :  $F_{X|B}(x) := P[X \leq x|B] \rightsquigarrow f_{X|B}$ .

---

## Domácí úkol 10

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>  
Pravděpodobnost a statistika 1

Zadáno 19. 4. 2023  
Odevzdejte do 26. 4. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

### Úloha 1 (Trojúhelník)

Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$  a  $[1, 0]$ , tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$ .
- Najděte podmíněnou hustotu  $f_{X|Y}$ .
- Spočtěte  $\mathbb{E}(X|Y = y)$  a podle věty o rozboru možností spočtěte  $\mathbb{E}(X)$  (pomocí  $\mathbb{E}(Y)$ ).
- Spočtěte  $\mathbb{E}(X)$  pomocí předchozí části a symetrie.