

# 10. cvičení

Pravděpodobnost a statistika 1, 24. 4. 2023

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>

## Konvoluce

**Úloha 1** (Sčítáme náhodné veličiny)

Bud' te  $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$  nezávislé náhodně veličiny.

- a) Jaké je rozdělení  $X + Y$ ?
- b) Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ?

**Řešení** a)  $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x)F_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} dx = \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z e^{(\lambda-\lambda)x} dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$

b) **TODO**

**Úloha 2** (Součet podruhé)

Bud' te  $X, Y, Z \sim U(0, 1)$  nezávislé náhodně veličiny.

- a) Jaké je rozdělení  $X + Y$ ? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- b) Jaké je rozdělení  $X + Y + Z$ ? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu  $[0, 1]$ .
- c) Jak výsledek ověřit samplováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Pythonu, nebo jen popište, co byste dělali.)

**Řešení** a) evidentně 0 mimo  $[0, 2]$ , pro  $z \in [0, 1]$  :  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)F_Y(z-t)dt = \int_0^z 1dx = z$ , pro  $z \in [1, 2]$ :  
 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)F_Y(z-t)dt = \int_{z-1}^z 1dx = 2 - z$

- b) Zase konvoluce po částech, mimo  $[0, 3]$  evidentně 0, na  $[0, 1]$  :  $f_{X+Y+Z}(w) = w^2/2$ , na  $[1, 2]$  :  $f_{X+Y+Z}(w) = -w^2 + 3w - 3/2$ , na  $[2, 3]$  :  $f_{X+Y+Z}(w) = (w - 3)^2/2$ .
- c) prostě budeme samplovat

## Podmíněná hustota

**Úloha 3** (Určení podmíněné hustoty)

Nechť  $X, Y$  mají sdruženou hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- a) Určete podmíněnou hustotu  $f_{X|Y}$ .
- b) Určete podmíněnou hustotu  $f_{Y|X}$ .

**Řešení**

Marginální hustoty:  $f_X(x) = e^{-x}$ ,  $f_Y(y) = ye^{-y}$  na očekávaných intervalech

- a)  $f_{X|Y} = \frac{1}{y}$  pro  $y > x > 0$
- b)  $f_{Y|X} = \frac{e^{-y}}{e^{-x}} = e^{x-y}$  pro  $y > x > 0$ .

**Úloha 4** (Lámání klacku)

Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme  $Y$ . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme  $X$ .

- a) Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ . Může vám pomoci podmíněná hustota  $f_{X|Y}$ .
- b) Najděte marginální hustotu  $f_X$ .
- c) Pomocí  $f_X$  spočítejte  $\mathbb{E}(X)$ .

**Řešení** a)  $f_{X|Y}(x) = \frac{1}{y}$  na  $[0, y]$ ,  $f_Y(y) = 1$  na  $[0, 1] \rightsquigarrow f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y}$  pro  $0 < x < y < 1$ .

b)  $f_X(x) = \int_x^1 \frac{1}{y} dy = -\log(x)$

c)  $\mathbb{E}(X) = \int_0^1 -x \log(x) dx = 1/4$

### Úloha 5 (Rozlomit do trojúhelníka)

Metrový klacek rozložíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

- Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

### Řešení

Máme  $X + Y + Z = 1$ , potřebujeme trojúhelníkovou nerovnost:  $X + Y \geq Z$ ,  $X + Z \geq Y$ ,  $Y + Z \geq X$ , speciálně tedy musí platit  $1 - X \geq X$ , a tedy  $X \leq 1/2$ , pro oba další analogicky.

- Problém je, když se oba řezy trejí do stejné poloviny, nebo když vzdálenost mezi řezy je aspoň  $1/2$ : tedy  $P[\Delta] = 1 - (1/4 + 1/4 + 1/4) = 1/4$  – alternativně se dá nakreslit prostor daný  $X, Y$ , a případy odpovídají částem prostoru.
- $\int_0^{1/2} \int_{1/2-x}^{1/2} \frac{1}{1-x} dy dx = \log(2) - 1/2 \approx 0.193$  (tj.  $x$  musí být maximálně  $1/2$ , a  $y$  musí být aspoň  $1/2 - x$ , aby  $z$  nebylo velké, a zároveň musí být maximálně  $1/2$ ).
- $\int_0^{1/2} \int_{1/2-x}^{1/2} \frac{2}{1-x} dy dx = 2(\log(2) - 1/2)$  (hustota je dvojnásobná, protože  $x, 1-x$  odpovídají témuž; alternativně jde říct, že nejdříve vezmeme uniformně hodnotu  $z$  z intervalu  $[0, 1/2]$  jako tu menší, a potom pracujeme se zbytkem "jakoby v pravé ruce").

## Spojité vektory

### Úloha 6 (Náhodný bod)

Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$  a spočtete pomocí ní  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Pro kontrolu spočtete  $\mathbb{E}(Y)$  přímo (pomocí pravidla LOTUS).

**Řešení** a)  $f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0 & x^2 + y^2 > 1 \\ \frac{2}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$

b)  $f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y^2 > 1 \\ \frac{2 \cdot \sqrt{1-y^2}}{\pi} & y^2 \leq 1 \end{cases}$ ,  $\mathbb{E}[Y] = \int_{-1}^1 \frac{2 \cdot y \sqrt{1-y^2}}{\pi} dy = 0$ , prim. fce je  $\frac{-2(1-y^2)^{3/2}}{3\pi}$

### Úloha 7 (Maximum z uniformních)

Bud'  $Y$  maximum z  $k$  uniformně náhodných čísel z intervalu  $[0, 1]$ .

- Najděte distribuční funkci  $F_Y$ .
- Odsud určete hustotu  $f_Y$ .
- Spočítejte  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

**Řešení** a)  $F_Y(x) = x^k$  na intervalu  $[0, 1]$ , 0 pro  $x \leq 0$ , 1 pro  $x \geq 1$

b) 0 mimo  $[0, 1]$ , na  $[0, 1]$  to je  $kx^{k-1}$

c)  $\int_0^1 kx^k dx = \frac{k}{k+1}$

d)  $F_Z(x) = 1 - (1-x)^k$ ,  $f_Z(x) = k(1-x)^{k-1}$ ,  $\mathbb{E}[Z] = \frac{1}{k+1}$  (opět na stejných intervalech jako předtím)

### Tahák

- *Sdružené rozdělení:*  $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$ .
- *Sdružená hustota:*  $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$ .
- *Marginální hustota:*  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$ .
- *Nezávislost:*  $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ .
- *Konvoluce:* Pokud  $A = X + Y$ , máme  $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$ .
- *Podmíněná hustota:* pro n.v.  $X, Y$ :  $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ , pokud  $f_Y(y) > 0$ , jinak nedefinujeme.
- *Podmíněná hustota a distribuční funkce jevem:* pro jev  $B$  a n.v.  $X$ :  $F_{X|B}(x) := P[X \leq x|B] \rightsquigarrow f_{X|B}$ .

---

## Domácí úkol 10

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>  
Pravděpodobnost a statistika 1

Zadáno 24. 4. 2023  
Odevzdejte do 15. 5. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

---

### Úloha 1 (Trojúhelník)

Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$  a  $[1, 0]$ , tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme  $X, Y$  souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu  $f_{X,Y}$ .
- Najděte marginální hustotu  $f_Y$ .
- Najděte podmíněnou hustotu  $f_{X|Y}$ .
- Spočítejte  $\mathbb{E}(X|Y = y)$  a podle věty o rozboru možností spočítejte  $\mathbb{E}(X)$  (pomocí  $\mathbb{E}(Y)$ ).
- Spočítejte  $\mathbb{E}(X)$  pomocí předchozí části a symetrie.