

10. cvičení

Konvoluce

Úloha 1 (Sčítáme náhodné veličiny)

Bud'te $X, Y, Z \sim \text{Exp}(\lambda)$ nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení $X + Y$?
- Jaké je rozdělení $X + Y + Z$?

Úloha 2 (Součet podruhé)

Bud'te $X, Y, Z \sim U(0, 1)$ nezávislé náhodně veličiny.

- Jaké je rozdělení $X + Y$? Určete hustotu – jak podle konvolučního vzorce, tak „podle obrázku“.
- Jaké je rozdělení $X + Y + Z$? Pro jednoduchost určete hustotní funkci jen na intervalu $[0, 1]$.
- Jak výsledek ověřit smplováním? (Proveďte rychlý experiment, např. v Pythonu, nebo jen popište, co byste dělali.)

Podmíněná hustota

Úloha 3 (Určení podmíněné hustoty)

Nechť X, Y mají sdruženou hustotu

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{pro } 0 < x < y < \infty, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Určete podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
- Určete podmíněnou hustotu $f_{Y|X}$.

Úloha 4 (Lámání klacku)

Metrový klacek zlomíme v uniformně náhodném bodě a ponecháme si levý kus. Jeho délku označíme Y . V něm opět vybereme uniformně náhodný bod, kde klacek zlomíme, a délku levého kusu označíme X .

- Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$. Může vám pomoci podmíněná hustota $f_{X|Y}$.
- Najděte marginální hustotu f_X .
- Pomocí f_X spočítejte $\mathbb{E}(X)$.

Úloha 5 (Rozlomit do trojúhelníka)

Metrový klacek rozlomíme na tři kusy jedním z níže popsaných způsobů. Pro každý z nich spočítejte, jaká je pravděpodobnost, že ze získaných tří kusů jde sestavit trojúhelník. (Nápověda: napřed si rozmyslete, kdy jsou tři kladná čísla se součtem 1 stranami nějakého trojúhelníku.)

- Vybereme uniformně náhodně dva body zlomu.
- Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s kusem klacku v pravé ruce.
- Vybereme uniformně náhodně první bod zlomu. Pak totéž uděláme s větším kusem klacku.

Spojité vektory

Úloha 6 (Náhodný bod)

Volme uniformně náhodně bod z půlkruhu o poloměru 1, se středem v počátku a ležícím v horní polorovině. (Uniformně znamená, že pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu.) Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
- Najděte marginální hustotu f_Y a spočítejte pomocí ní $\mathbb{E}(Y)$.
- Pro kontrolu spočítejte $\mathbb{E}(Y)$ přímo (pomocí pravidla LOTUS).

Úloha 7 (Maximum z uniformních)

Bud' Y maximum z k uniformně náhodných čísel z intervalu $[0, 1]$.

- Najděte distribuční funkci F_Y .
- Odsud určete hustotu f_Y .
- Spočítejte $\mathbb{E}(Y)$.
- Jak to vyjde pro minimum místo maxima?

Tahák

- Sdružené rozdělení:* $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$.
- Sdružená hustota:* $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y)$.
- Marginální hustota:* $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$.
- Nezávislost:* $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \iff f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- Konvoluce:* Pokud $A = X + Y$, máme $f_A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$.
- Podmíněná hustota:* pro n.v. X, Y : $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, pokud $f_Y(y) > 0$, jinak nedefinujeme.
- Podmíněná hustota a distribuční funkce jevem:* pro jev B a n.v. X : $F_{X|B}(x) := P[X \leq x|B] \rightsquigarrow f_{X|B}$.

Domácí úkol 10

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/past/>
Pravděpodobnost a statistika 1

Zadáno 24. 4. 2023
Odevzdejte do 15. 5. 2023 9:00 přes Poštovní sovu

Úloha 1 (Trojúhelník)

Volme uniformně náhodně bod z trojúhelníku s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[0, 1]$ a $[1, 0]$, tj. pravděpodobnost každé podmnožiny je úměrná jejímu obsahu. Označme X, Y souřadnice zvoleného bodu.

- Najděte sdruženou hustotu $f_{X,Y}$.
- Najděte marginální hustotu f_Y .
- Najděte podmíněnou hustotu $f_{X|Y}$.
- Spočítejte $\mathbb{E}(X|Y = y)$ a podle věty o rozboru možností spočítejte $\mathbb{E}(X)$ (pomocí $\mathbb{E}(Y)$).
- Spočítejte $\mathbb{E}(X)$ pomocí předchozí části a symetrie.