8. cvičení

Úloha 1 (Lehké opakování pravděpodobnosti)
Matt střílí, a snaží se trefit se do terče. Protože je začátečník, pravděpodobnost, že se trefí, je $p \in (0, 1]$, a je nezávislá na jakýchkoliv jeho předchozích pokusech. Nechť X je náhodná veličina, která označuje počet pokusů do Mattovy první trefy (včetně). Ukažte, že $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$.

Řešení
Z definice: $\mathbb{E}[X] = p + (1-p)(1 + \mathbb{E}[X]) = 1 + (1-p)\mathbb{E}[X] \rightsquigarrow p\mathbb{E}[X] = 1 \rightsquigarrow \mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$.

Úloha 2 (Pravděpodobnost kolize)
Ukažte, že v hashovací tabulce velikosti $m = n^2$ s n prvky dojde ke kolizi s pravděpodobností maximálně $\frac{1}{2}$, předpokládáme-li zcela náhodnou hashovací funkci. (Zkuste to dokázat bez použití přímo padnoucího pozorování z přednášky.)

Řešení
$P[\text{kolize}] = P[\exists i \neq j \in [n] : h(i) = h(j)] = P[\bigcup_{i \neq j \in [n]} (h(i) = h(j))] \leq \sum_{i \neq j \in [n]} P[(h(i) = h(j))] = \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{m}$

Úloha 3 (Rehashujeme)
Jednoduchá implementace rehashe u kukačkového hashování je, že si všechny hodnoty vložíme do pomocného pole, a potom je po jednom insertujeme. Vymyslete implementaci rehashe, která pomocné pole nepotřebuje. (Pozor na to, že během rehashe můžeme znovu začít s rehashem.)

Řešení
Stačí projít pole T podle indexů, a když najdeme prvek ve špatné buňce, tak ho odstraníme, a znovu vložíme.

Bonusové úlohy

Úloha 4 (Pevné body permutací)
Mějme uniformně náhodnou permutaci na n prvcích. Určete střední hodnotu počtu pevných bodů této permutace.

Řešení
Použijeme indikátory: je-li F náhodná veličina určující počet pevných bodů náhodné permutace, můžeme psát $F = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$, kde I_ℓ je indikátor jevu, že $\pi(\ell) = \ell$. Pak $\mathbb{E}[F] = \mathbb{E}[I_1 + I_2 + \ldots + I_n] = \mathbb{E}[I_1] + \mathbb{E}[I_2] + \ldots + \mathbb{E}[I_n]$ z linearity střední hodnoty, a $\mathbb{E}[I_\ell] = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, a tedy $\mathbb{E}[F] = 1$.

Opáčko pravděpodobnosti

Definice (Pravděpodobnostní prostor)**.** Pravděpodobnostní prostor je trojice (Ω, Σ, P), taková, že Ω je tzv. nosná množina (všech jevů), Σ je množina přípustných jevů (podmnožin Ω), P je funkce $P : \Sigma \to [0, 1]$ a jsou splněny nějaké axiomy (omezující Σ na *σ-algebru* a P na *pravděpodobnost*).

Definice (Náhodná veličina, její střední hodnota)**.** Nechť $(\Omega, 2^\Omega, P)$ je diskrétní pravděpodobnostní prostor. Potom náhodná veličina je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ (každému jevu přiřazujeme nějaké číslo).
Střední hodnota této veličiny je definována jako $E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} P[\omega] \cdot X(\omega)$

Tvrzení (Union bound)**.** Pro jevy A_1, A_2 platí, že $P[A_1 \cup A_2] \leq P[A_1] + P[A_2]$.

Tvrzení (Linearita střední hodnoty)**.** Pro náhodné veličiny X, Y a $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

- $E[\alpha X] = \alpha E[X]$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

Definice (Indikátor, nezávislost náhodných veličin)**.** Nechť A je jev v diskrétním pravděpodobnostním prostoru. Potom indikátor A je náhodná veličina I_A definovaná: $I_A(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \notin A$, jinak $I_A(\omega) = 1$.
Náhodné veličiny X, Y na diskrétním pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, 2^\Omega, P)$ jsou nezávislé, pokud $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou jevy $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \alpha\}, \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq \beta\}$ nezávislé.

Věta (Markovova nerovnost)**.** Buď X nezáporná náhodná veličina. Pak $\forall \varepsilon > 0$ platí $P[X \geq \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\varepsilon}$.
Ekvivalentně pro jakékoliv $d > 1$, $P[X \geq d \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{d}$.

Věta (Chernoffova mez)**.** Mějme $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$, kde X_i jsou nezávislé Bernoulliovské náhodné veličiny, $\mu = \mathbb{E}[X], c > 1$. Pak $P[X \geq c\mu] \leq \left(\frac{e^{c-1}}{c^c}\right)^\mu$.