

4. cvičení

Datové struktury I, 25. 10. 2022

<https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/ds1/>

Úloha 1 (Potenciál)

Ujistěte se, že chápete, jak je definovaný potenciál ve splay stromech a že rozumíte hlavním myšlenkám analýzy amortizované složitosti splaye.

1. Jak je definován potenciál splay stromu?
2. Jaká je amortizovaná cena rotace (dvojitě a jednoduché)?
3. Jaká je amortizovaná cena celého splaye a jak plyne z amortizovaných cen rotace?
4. Jaké je *reálná* cena celého splaye (a v jakých jednotkách ji vlastně počítáme)?
5. Jaký je potenciál perfektně vyváženého stromu? (Stačí nám rozumný horní a dolní odhad, pro jednoduchost předpokládejte $n = 2^k - 1$.)
6. Jaký je potenciál cesty? (Opět stačí rozumné odhady.)

Úloha 2 (Hloubka splay stromů nemusí být vždy logaritmická)

Navrhněte posloupnost operací, která vytvoří splay strom s lineární hloubkou a to jak pro naivní splay, tak pro správný splay.

Úloha 3 (Naivita se ne vždy vyplácí)

Co se pokazí, když operaci SPLAY implementujeme naivně, tedy jen pomocí jednoduchých rotací jedné hrany?

Úloha 4 (Rozdělujeme stromy)

Pro splay strom T a hodnotu k navrhněte operaci SPLIT, která strom T rozdělí na dva stromy T' , T'' , přičemž ve stromě T' jsou všechny hodnoty menší nebo rovny k a ve stromě T'' jsou všechny hodnoty větší než k . Pokuste se zachovat amortizovanou složitost.

Úloha 5 (A teď stromy spojujeme)

Pro splay stromy T' , T'' , kde všechny hodnoty v T' jsou menší než všechny hodnoty v T'' , navrhněte operaci JOIN(T' , T''), která sloučí stromy do jednoho v čase $\mathcal{O}(|T'| + |T''|)$.

Úloha 6 (Insert a delete přes split a join)

Navrhněte alternativní operace INSERT a DELETE za pomoci operací SPLIT a JOIN.

Bonusové úlohy

Úloha 7 (Líně vyvažujeme)

Na přednášce jste viděli binární vyhledávací stromy vyvažované líně pomocí lokálního přestavování. Prozkoumáme detaily přestavby a navrhneme implementaci operace delete:

- a) Ukažte, že libovolný BVS lze přestavět na perfektně vyvážený v lineárním čase.
- b) Potenciál v amortizované analýze byl definován skrz součet potenciálu vrcholů a potenciál vrcholu $r(v)$ je buď $|s(L_v) - s(R_v)|$, nebo nula, pokud je předchozí rozdíl přesně jedna. Co by se rozbilo, kdybychom pro rozdíl jedna prostě nastavili potenciál na jedničku?
- c) Přidejte delete tak, jak funguje v obyčejném BST spolu s vhodným lokálním přestavením a analyzujte složitost.
- d) Přidejte delete pomocí náhrobků a globální přestavby stromu. To znamená, že mazané vrcholy necháme ve stromě, ale označíme je jako smazané (náhrobek). Je-li náhrobků ve stromě moc, celý strom přestavíme a přitom náhrobky zlikvidujeme. Doplňte detaily (např. kolik je „moc“) a konstrukci analyzujte.

Úloha 8 (Pro fajšmekry)

Proveďte přestavění BVS na perfektně vyvážený BVS v lineárním čase a s konstantní pamětí.