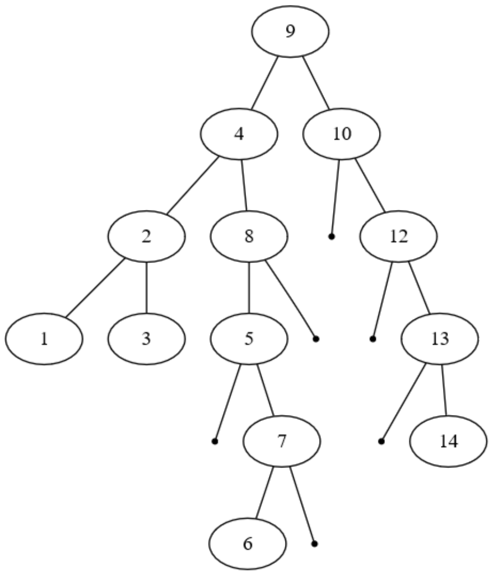
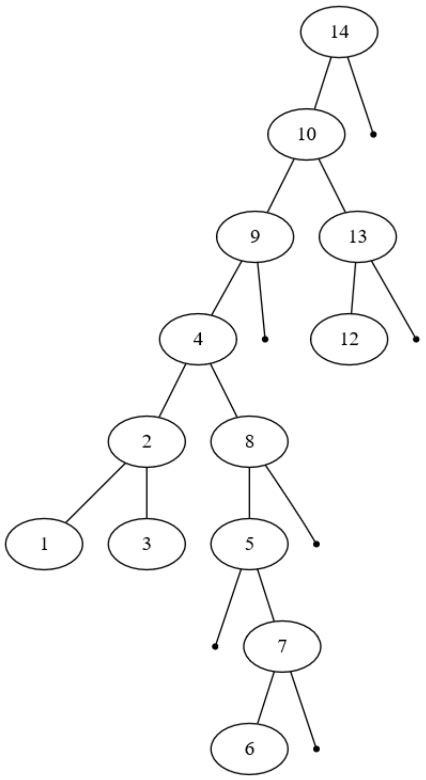
3. cvičení

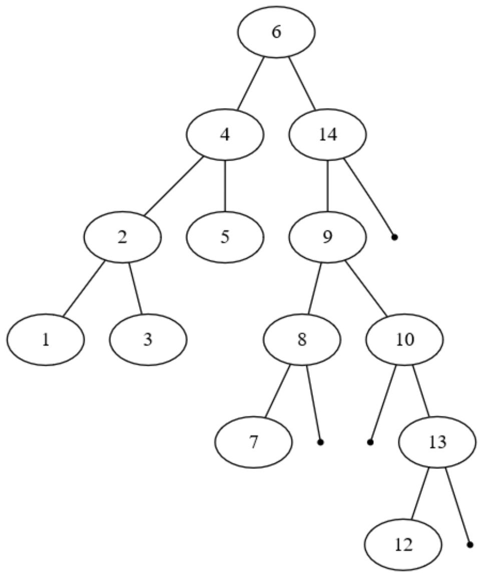
Datové struktury I, 18. 10. 2022 `https://iuuk.mff.cuni.cz/~chmel/2223/ds1/`

Úloha 1 (Zasplayujme si)
Na splay stromu na obrázku proveďte následující operace:

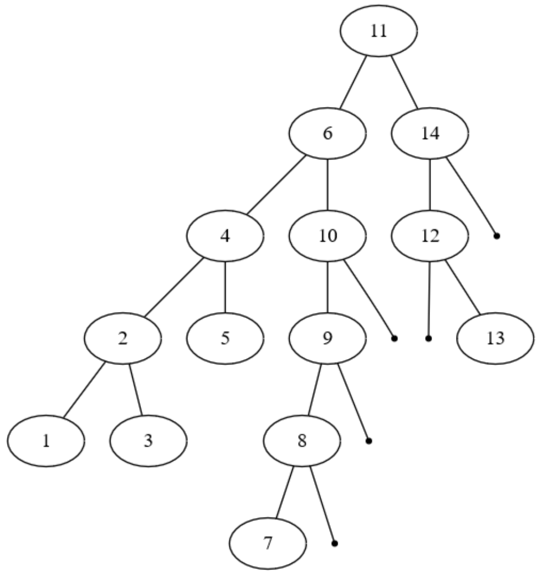
- SPLAY(14)
- SPLAY(6)
- INSERT(11)
- DELETE(6)
- DELETE(10)
- DELETE(4)

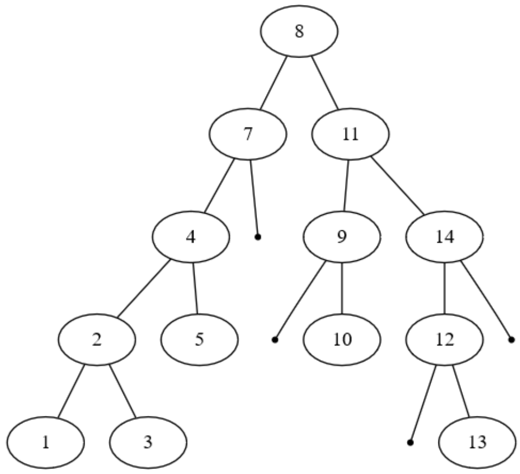


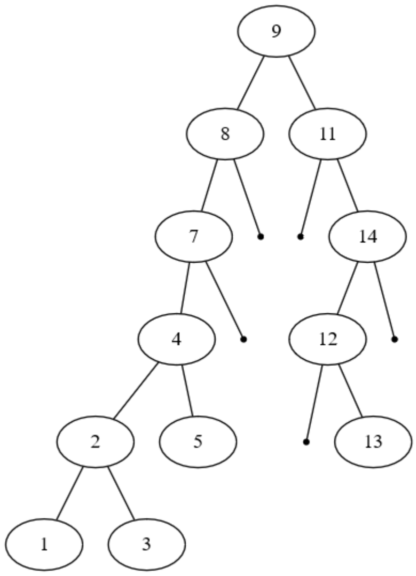


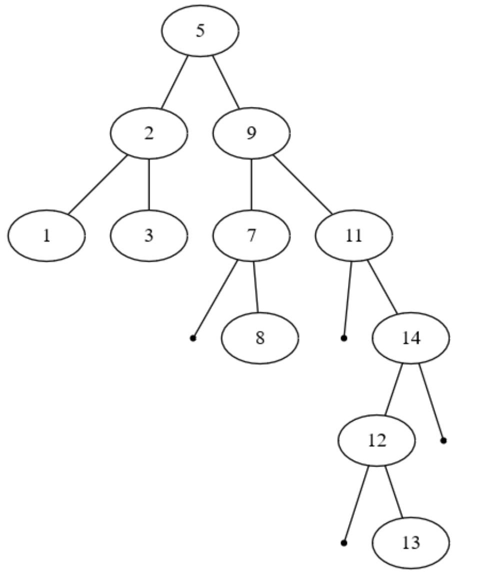


Řešení









Úloha 2 (Staticky optimální BVS)
Máme množinu klíčů $k_1 < \ldots < k_n$, ze kterých chceme postavit statický BVS. Zároveň známe četnosti přístupů $w_1, \ldots, w_n$, kde $w_i > 0$. (Také se na tyto četnosti můžeme dívat jako na pravděpodobnosti.)
Sestrojte staticky optimální BVS, který minimalizuje součet $\sum_{i=1}^{n} h(i) \cdot w_i$, kde $h(i)$ je hloubka klíče k_i, a kořen má hloubku 1. (Tedy takový strom, že provedení w_i přístupů ke klíči k_i pro každé i bude trvat co nejmenší dobu.)

Řešení
Jednodušší řešení: dynamika podle kořene - budeme mít tabulku $T[a,b], a \leq b$, což je součet pro nejlepší strom s indexy od a do b včetně. Snadno $T[a,a] = 0$, protože potom je a nutně v kořeni. Pak $T[a,b] = \min_{a \leq c \leq b}(T[a,c-1] + T[c+1,b] + \sum_{i=a}^{b} w_i)$.
Takhle to je $\mathcal{O}(n^3)$, protože máme řádově kvadraticky políček, a každé trvá max. linárně dlouho.
Ale jde to lépe, pokud si navíc budeme pamatovat kořeny těchto podstromů v poli $R[a,b]$: protože můžeme zpozorovat, že když víme $R[a,b-1]$ a $R[a+1,b]$, tak $R[a,b-1] \leq R[a,b] \leq R[a+1,b]$.
Začneme s analýzou časové složitosti: $\sum_{a=1}^{n} \sum_{b=a+1}^{n} (R[a+1,b] - R[a,b-1]) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{a=1}^{n-i+1} (R[a+1,a+i] - R[a,a+i-1]) = \sum_{i=1}^{n} (R[n-i,n] - R[1,i]) \leq \sum_{i=1}^{n} (n-1) \in \mathcal{O}(n^2)$. První rovnost plyne z přerovnání - nejprve sčítáme přes možné volby a, b, a poté sčítáme podle délek, a pak přes všechna pole dané délky. Druhá rovnost plyne z toho, že vnitřní suma teleskopuje ($R[n-i,n] - R[n-i-1,n-1] + R[n-i-1,n-1] - \ldots - R[2,i+1] + R[2,i+1] - R[1,i] = R[n-i,n] - R[1,i]$). Následující nerovnost pak plyne z toho, že $R[n-i,n] \leq n, R[1,i] \geq 1$.s

A proč to pozorování o kořenech vůbec platí? Dokážeme jen první nerovnost $R[a, b-1] \leq R[a, b]$, a budeme dokazovat indukcí podle $b-a$. Pro $b-a=1$ máme tvrzení triviálně splněno, neboť $R[a, b-1] = R[a, a] = a$, a $R[a, b] \geq a$.
Nyní mějme $b - a > 1$. Pro začátek předpokládejme $w_b = 0$. V tom případě pozorování opět snadno platí, protože b můžeme do optimálního stromu $T[a, b-1]$ přidat jako pravého syna nejpravějšího vrcholu, a díky nulové frekvenci se nám nic nepokazí - tím máme strom $\mathcal{T}$.
Mějme v četnost takovou, že $\mathcal{T}$ je optimální strom pro všechna $w_b = v - \varepsilon$ pro $\varepsilon > 0$, ale pro všechna $w_b = v + \varepsilon$ pro libovolně malé $\varepsilon > 0$ už je optimální strom $\mathcal{T}' \neq \mathcal{T}$. Zároveň předpokládejme, že kořen $\mathcal{T}'$ má levější index než kořen $\mathcal{T}$. Z definice víme, že pro h hloubku v $\mathcal{T}$ a h' hloubku v $\mathcal{T}'$ máme součty $\sum_{i=a}^{b} h(i)w_i$, $\sum_{i=a}^{b} h'(i)w_i$. Tyto součty jsou navíc pro v stejné, a zároveň musíme mít $h'(b) < h(b)$, aby se zvětšujícím se w_b byl $\mathcal{T}'$ lepší.
Uvažme tedy cesty z kořene do b: ve stromě $\mathcal{T}$ máme cestu s klíči $c_1, c_2, \ldots, c_k = b$, v $\mathcal{T}'$ máme cestu s klíči $d_1, d_2, \ldots, d_\ell = b$ a $k > \ell$. Protože předpokládáme, že $c_1 > d_1$, můžeme použít indukci pro $R[c_1+1, b] \geq R[d_1+1, b]$, abychom zjistili, že $c_2 \geq d_2$. Pokud bychom opět měli ostrou nerovnost, pak analogicky můžeme ukázat $c_i \geq d_i$. Ale víme, že $c_\ell < b = d_\ell$, a tedy musí existovat index j, že $c_j = d_j$. Potom ovšem můžeme zaměnit ve stromě $\mathcal{T}$ pravý podstrom pod c_j za pravý podstrom v $\mathcal{T}'$ pod d_j, a tím získáme nový strom $\mathcal{T}''$, který má stejný součet jako $\mathcal{T}'$ for všechny možné hodnoty w_i, a zároveň má kořen stejný jako $\mathcal{T}$, čímž jsme dokázali, že nerovnost opravdu platí. (Tedy existuje optimální strom s kořenem mezi $R[a, b-1]$ a $R[a, b+1]$.)

Úloha 3 (Potenciál pro následníka)
Na prvním cvičení jsme si ukázali, že použití n operací následníka na libovolném BVS, když začneme ve vrcholu s nejmenším klíčem, má složitost $\mathcal{O}(n)$. Jak to můžeme dokázat pomocí potenciálu?

Řešení
Zadefinujeme si potenciál $\Phi(x)$ jako $h + s_L(x) - s_R(x)$ pro x aktuální vrchol, kde h je maximální hloubka stromu, $s_L(x)$ je počet levých synů na cestě z kořene do x a $s_R(x)$ je počet pravých synů na cestě z kořene do x.
Speciálně nalezení nejnižšího prvku trvá i amortizovaně jeho hloubku, ale to v analýze všech kroků nevadí.
Podíváme se na jednotlivé případy použití operace následníka na x:

1. pokud x má pravého syna a y je následníkem x, pak $s_R(x) - s_R(y) = -1$, $s_L(y) - s_L(x) =$ hloubka vrcholu y pod pravým a tedy $\Phi(y) - \Phi(x)$ je řádově reálná cena operace,

2. pokud x pravého syna nemá, postupujeme po otcích, dokud nevystoupíme poprvé jako levý syn - v tom případě pro vrchol y, který je následníkem x, máme $s_R(x) - s_R(y) =$ počet hran, které jsme vystoupali nahoru -1 a $s_L(y) - s_L(x) = -1$, což je opět řádově reálná cena operace.

Zároveň snadno zpozorujeme, že hodnota potenciálu je nejvýše $2h$.
Speciálně tedy až na první operaci v čase h máme všechny ostatní operace amortizovaně v $\mathcal{O}(1)$, a tedy celková složitost je $\mathcal{O}(n+h) = \mathcal{O}(n)$, neboť $h \leq n$.

Zbývající úlohy si necháme na příště.