# Bonusové domácí úkoly

`https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/` Odevzdejte do 31. 1. 2022 23:59

Diskrétní matematika chmel@kam.mff.cuni.cz

Tyto úkoly jsou čistě bonusové a tedy se nepočítají do maxima bodů. Máte na ně čas až do konce ledna. Pokud byste ještě potřebovali víc času, napište mi, a čas vám prodloužím (ale nejpozději do konce zkouškového). Po posledním cvičení přidám ještě pár dalších bonusových úkolů.

**Úloha 1** (Co jsem dělal špatně?)
Napište mi, co jsem na cvičeních dělal špatně, abych to mohl do budoucna zlepšit. **[1 bonusový bod]**

**Úloha 2** (Kruhy v rovině)
Dokažte, že máme-li v rovině nakreslené kruhy $K_1, \ldots, K_n \subset \mathbb{R}^2$ tak, že každé dva kruhy se nejvýše dotýkají (tj. nemají žádný, nebo mají právě jeden společný bod), pak graf $G = (\{K_1, \ldots, K_n\}, \{\{K_i, K_j\} : K_i \cap K_j \neq \emptyset\})$ je rovinný. **[2 bonusové body]**

**Úloha 3** (Chybný důkaz)
*Tvrzení:* Každé přirozené číslo $n > 1$ má (až na pořadí činitelů) *jednoznačný* prvočíselný rozklad. (Například číslo 30 má prvočíselný rozklad $f(30) = 2 \cdot 3 \cdot 5$.)

*Důkaz silnou indukcí:* Báze: Číslo 2 má pouze jeden prvočíselný rozklad, $f(2) = 2$.
Indukční krok: Předpokládejme, že tvrzení platí pro každé $k$ takové, že $1 < k < n$. Rozlišíme dva případy:

- $n$ je prvočíslo, pak má jediný prvočíselný rozklad: $f(n) = n$.
- $n$ je složené číslo, tedy existují $a, b \in \mathbb{N} : n = a \cdot b$. Z indukčního předpokladu mají čísla $a, b$ své jednoznačné prvočíselné rozklady $f(a) = \prod_i p_i, f(b) = \prod q_j$. Pak $n$ má jednoznačný prvočíselný rozklad $f(n) = \prod_i p_i \cdot \prod_j q_j$ (až na pořadí činitelů).

Pozor: tohle tvrzení samo o sobě platí, jen tento důkaz není správně. Není potřeba, abyste důkaz opravili, stačí v něm najít chybu. Když nebudete vědět, napište mi e-mail s tím, v čem chyba určitě není a co se vám třeba zdá podezřelé, a já vám pošlu hint. **[4 bonusové body]**

**Úloha 4** (Součet vzdáleností od jednoho vrcholu v hyperkrychli)
Uvažme graf $H_n$ – $n$-dimenzionální hyperkrychli definovanou následovně:

- vrcholy $H_n$ jsou $n$-bitové řetězce nul a jedniček (tedy $H_n$ má $2^n$ vrcholů),
- $u, v \in V(H_n)$ jsou spojeny hranou, právě když se oba řetězce liší právě v jedné pozici.

(Tedy $H_2$ je izomorfní s $C_4$, $H_4$ je teserakt, který jste mohli vidět na cvičení 14. prosince.)
Označme $v = 0^n$ řetězec délky $n$ obsahující samé nuly a připomeňme, že $d : V(H_n) \times V(H_n) \to \mathbb{R}$ označuje vzdálenost v grafu. Určete $\sum_{u \in V(H_n)} d(u, v)$ (tj. součet vzdáleností všech vrcholů od $v$). **[3 bonusové body]**

**Úloha 5** (Cesta doprostřed jiné cesty)
Nechť $G = (V, E)$ je graf bez izolovaných vrcholů a $\mathcal{S}$ je množina podgrafů $G$ taková, že $\forall P \in \mathcal{S} \exists n \in \mathbb{N} : P \cong P_n$ a zároveň $\forall P, P' \in \mathcal{S} : P \neq P' \Rightarrow E(P) \cap E(P') = \emptyset$. (Tj. $\mathcal{S}$ je rozklad $G$ na hranově disjunktní cesty.)
Dokažte, že je-li $\mathcal{S}$ mohutností nejmenší taková, že splňuje podmínky z předchozího odstavce, a navíc ze všech takových maximalizuje $\sum_{P \in \mathbb{S}} |E(P)|^2$, pak pro všechny cesty $P, Q \in \mathcal{S}$ takové, že $|E(P)| \leq |E(Q)|$ platí, že ani jeden ze dvou vrcholů stupně 1 cesty $Q$ nepatří do vrcholů cesty $P$. **[3 bonusové body]**

**Úloha 6**
Ukažte, že v každém souvislém grafu $G = (V, E)$ na alespoň třech vrcholech existují vrcholy $u, v$ takové, že všechny tři podgrafy indukované množinami $V \setminus \{u\}, V \setminus \{v\}, V \setminus \{u, v\}$ jsou souvislé. **[2 bonusové body]**