Domácí úkol 9

https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/ Zadáno 14. 12. 2021

Odevzdejte do 31. 1. 2022

Diskrétní matematika chmel@kam.mff.cuni.cz

Na úkoly máte čas až do konce ledna. Ještě zadám jednu sérii normálních úkolů na pravděpodobnost, slíbené bonusové úkoly zveřejním po prvním termínu písemky.

Úloha 1 (Pěticykly a delší)
Určete, jaký největší počet hran může obsahovat takový rovinný graf, který neobsahuje žádné kružnice délky 3 a 4. **[3]**

Úloha 2 (Abychom měli hodně barevný graf, musí mít hodně hran)
Dokažte, že pokud je graf dobře obarvitelný k barvami ale už ne $k-1$ barvami, pak má takový hran alespoň $\binom{k}{2}$ hran. **[4]**
Hint: zkuste to dokázat sporem – ukažte, že pokud by měl graf méně než $\binom{k}{2}$ *hran, pak můžeme dvě barvičky spojit do jedné a nic nám to nepokazí.*

Úloha 3 (Kouzelně barevné grafy)
Graf G nazveme *oktarínovým*[1], pokud

- se jedná o graf na jednom vrcholu $G = (\{1\}, \emptyset)$, nebo
- jsme jej vytvořili z nějakého jiného *oktarínového* grafu tak, že přidáme dva nové vrcholy u, v spojené hranou, které spojíme s některými dalšími vrcholy v tom grafu – oba se stejnými a alespoň s jedním. (Tedy alespoň s jedním a ne nutně se všemi.)

Rozhodněte, zda pro každý oktarínový graf G platí či neplatí následující:

1. G je eulerovský
2. G je rovinný
3. G je bipartitní

Máte tedy buď dokázat, že daná vlastnost platí pro všechny oktarínové grafy, nebo že pro všechny oktarínové grafy neplatí, nebo nalézt dva oktarínové grafy: jeden mající danou vlastnost a druhý, který tutéž vlastnost nemá. **[3]**

Definice 1 (Rovinný graf)
Graf G je rovinný, jestliže existuje jeho rovinné nakreslení (tj. nakreslení do roviny takové, že žádné dva oblouky se vyjma koncových bodů nedotýkají).

Věta 1 (Eulerova formule, 1752)
Pokud $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf a f je počet stěn nějakého rovinného nakreslení G, pak $|V| - |E| + f = 2$.

Důsledek 1 (Důsledky Eulerovy formule)
Počet stěn nakreslení rovinného grafu nezávisí na nakreslení.
Každý rovinný graf má vrchol stupně ≤ 5.

Definice 2 (Podrozdělení hrany, dělení grafu)
Je-li $G = (V, E)$ graf, $e \in E$ jeho hrana, pak podrozdělení hrany $e = \{u, v\}$ je graf $G' = (V \cup \{e\}, E \cup \{\{e, v\}, \{u, v\}\})$. (Neformálně: vezmeme hranu, a nahradíme ji cestou.)
Graf H je dělení grafu G, jestliže lze graf H vytvořit z grafu G opakováním operace podrozdělení hran.

Věta 2 (Kuratowski, 1930)
Graf je rovinný, právě když neobsahuje dělení K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf.

Definice 3 (d-degenerovanost grafu)
Řekneme, že $G = (V, E)$ je d-degenerovaný, pokud můžeme vrcholy grafu seřadit do posloupnosti $(v_1, \ldots, v_n)$ tak, že pro každé $i \in [n]$ platí, že v_i sousedí s nejvýše d vrcholy z množiny $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$. (Na posloupnost se můžeme dívat „z druhé strany“ jako na pořadí odebírání vrcholů tak, že vždycky odebíráme vrchol stupně nejvýše d.)

Definice 4 (Obarvení a chromatické číslo grafu)
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že $c : V \to [k]$ je (dobré) obarvení grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $e = \{u, v\}$ platí, že $c(u) \neq c(v)$.
Dále chromatické číslo grafu G, značené $\chi(G)$, je nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje obarvení G pomocí k barev.

---

[1] Tento název používáme jen pro tuto úlohu, není nijak standardizovaný.