

Domácí úkol 8

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/>

Zadáno 7. 12. 2021

Odevzdejte do 4. 1. 2022 8:59

Diskrétní matematika

chmel@kam.mff.cuni.cz

Úloha 1 (Skórované grafy)

U následujících posloupností určete, zda se jedná o skóre nějakého grafu. Pokud ano, pak takový graf nakreslete a ke každému vrcholu napište jeho stupeň. Pokud ne, vysvětlete proč.

1. (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)
2. (3, 3, 3, 3, 3, 3, 6)
3. (1, 1, 4, 4, 4, 4, 5)
4. (2, 3, 4, 4, 5)
5. (1, 3, 3, 4, 5, 6, 6)
6. (1, 2, 2, 3, 4, 4)

[6×0,5=3]

Úloha 2 (Stromové doplňky)

Najděte všechny stromy T , jejichž doplňkem je také strom. Zdůvodněte, že jste na nějaký nezapomněli.

Hint: může se hodit počet hran.

[3]

Definice 1 (Skóre grafu)

Bud' $G = (V, E)$ graf, kde $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Pak posloupnost $(\deg(v_1), \dots, \deg(v_n))$ nazýváme *skórem* grafu G .
Konvence: dvě skóre považujeme za stejná, pokud se liší jen pořadím čísel.

Věta 1 (Věta o skóre)

Nechť $D = (d_1, \dots, d_n)$ je posloupnost taková, že $\forall i \in [n] : d_i \in \mathbb{N}_0$ a $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$.

Pak D je skóre nějakého grafu, právě když $D' = (d'_1, \dots, d'_{n-1})$ je skóre nějakého grafu, kde $d'_i = d_i$ pro $i < n - d_n$, $d'_i = d_i - 1$ pro $i \geq n - d_n$

Definice 2 (Biologické pojmy - strom, les, list a kostra)

Řekneme, že graf G je *strom*, jestliže je souvislý a neobsahuje žádný cyklus.

Dále řekneme, že graf G je *les*, jestliže neobsahuje žádný cyklus.

Vrchol v grafu G je *list*, jestliže $\deg_G(v) = 1$.

Řekneme, že graf $T = (V_T, E_T)$ je *kostrou* grafu $G = (V, E)$, pokud $V_T = V$, $E_T \subseteq E$ a zároveň T je strom.

Lemma 1 (O olistěných stromech)

Každý strom na alespoň dvou vrcholech má alespoň dva listy.

Lemma 2 (O trhání listů)

Nechť G je graf a v je jeho list. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom
2. $G - v$ (graf vzniklý z G odebráním vrcholu v) je strom

Věta 2 (Ekvivalentní charakterizace stromu)

Bud' $G = (V, E)$ graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom
2. $\forall x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z x do y
3. G je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf
4. G nemá kružnici a přidáním libovolné hrany vznikne kružnice
5. G je souvislý a $|V| = |E| + 1$