Domácí úkol 7

https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/ Zadáno 30. 11. 2021
Odevzdejte do 14. 12. 2021 8:59

Diskrétní matematika chmel@kam.mff.cuni.cz

Úloha 1 (Skoro-úplné grafy)
Dokažte, že pro každé n jsou všechny $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech navzájem izomorfní. **[3]**

Úloha 2 (Line graphy a eulerovskost)
Jako line graph grafu $G=(V,E)$ definujeme graf $L(G)=(E,X)$, kde $X=\{\{e_1,e_2\}\in\binom{E}{2} : e_1\cap e_2\neq\emptyset\}$.
Slovně: line graph $L(G)$ grafu G je graf, jehož vrcholy jsou hrany původního grafu G a dva vrcholy line graphu (hrany v G) jsou spojeny hranou v $L(G)$, pokud v grafu G sdílejí vrchol.
Ukažte, že když je graf G eulerovský, pak i jeho line graph $L(G)$ je eulerovský.
Hint: máte větu z přednášky, která charakterizuje eulerovské grafy, tak tu větu využijte. **[4]**

Úloha 3 (d-regularita grafu i doplňku)
Dokažte, že pokud graf G i jeho doplněk $\overline{G}$ jsou oba d-regulární, pak mají lichý počet vrcholů.
Hint: začněte s tím, že ukážete, že pokud je G k-regulární, pak $\overline{G}$ je ℓ-regulární (pro nějaké ℓ)
Samozřejmě můžete tvrzení dokazovat i jinak. **[3]**

Definice 1 (Metrika)
Mějme množinu M a funkci $d: M\times M\to\mathbb{R}$. Řekneme, že f je *metrika*, pokud splňuje následující vlastnosti:

1. $\forall x,y\in M : d(x,y)\geq 0$ a navíc rovnost platí, právě když $x=y$.
   (Vzdálenosti jsou nezáporné, a pro rozdílné body jsou kladné.)
2. $\forall x,y\in M : d(x,y)=d(y,x)$
   (Vzdálenost z x do y je tatáž jako z y do x.)
3. $\forall x,y,z\in M : d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$
   (Trojúhelníková nerovnost: když jdu z x do z přímo, nemůže to být delší než když půjdu přes y.)

Definice 2 (Matice sousednosti)
Matice sousednosti grafu $G=(\{v_1,v_2,\dots,v_n\},E)$ je matice $A\in\{0,1\}^{n\times n}$, kde $a_{ij}=1$, pokud $\{v_i,v_j\}\in E$ a $a_{ij}=0$ jinak.

Definice 3 (Souvislost)
Graf G je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy $u,v\in V(G)$ existuje cesta v G s krajními vrcholy u a v.

Definice 4 (Tahy)
Posloupnost $(v_0,e_1,v_1,e_2,\dots,v_n)$ je *tah* v grafu G, jestliže $\forall i\in[n] : v_i\neq v_{i-1}, \forall i\in[n] : e_i=\{v_{i-1},v_i\}, \forall i,j\in[n] : i\neq j\Rightarrow e_i\neq e_j$ (tedy se jedná o posloupnost střídavě vrcholů a hran takovou, že hrana je vždy mezi dvěma vrcholy, které spojuje a žádná hrana se v tahu nevyskytuje dvakrát).
Tah je *uzavřený*, jestliže $v_0=v_n$.
Tah je *eulerovský*, jestliže se v něm každá hrana vyskytuje aspoň jednou (tedy právě jednou).

Věta 1 (O eulerovských grafech)
Souvislý graf je eulerovský (tj. má uzavřený eulerovský tah), právě když má všechny stupně sudé.

Definice 5 (Regularita)
Řekneme, že graf G je k-regulární, jestliže každý jeho vrchol má stupeň k.

Definice 6 (Hamiltonovská kružnice)
Hamiltonovská kružnice grafu G je kružnice, která je podgrafem grafu G a zároveň obsahuje všechny jeho vrcholy.

Věta 2 (Karp, 1972)
Je NP-těžké rozhodnout, zda má daný graf G Hamiltonovskou kružnici. (Tedy neznáme žádný algoritmus, který by ji byl schopen nalézt v polynomálním čase a obecně se má za to, že takový algoritmus nejspíš neexistuje. Pokud nám ale někdo nějakou Hamiltonovskou kružnici předloží, tak v polynomiálním čase snadno ověříme, že se opravdu o Hamiltonovskou kružnici jedná.)