Domácí úkol 3

`https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/` Zadáno 2. 11. 2021

Odevzdejte do 20. 11. 2021 23:59

Diskrétní matematika `chmel@kam.mff.cuni.cz`

Úloha 1 (Příprava na státnice)
Určete, zda je následující relace $(X, *)$ reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní. Jde-li o ekvivalenci, určete počet tříd ekvivalence; jde-li o částečné uspořádání, určete velikost největšího antiřetězce:

$$X = \{1, 2, \dots, 10\}^2, (a, b) * (c, d) \Leftrightarrow (3|(a - c) \wedge b \cdot d \geq \max\{b, d\})$$

[3]

(Poznámka: zápis $a|b$ značí „a dělí b“.)

Úloha 2 (Inverz č.u.m.)
Nechť (X, R) je částečně uspořádaná množina. Dokažte, že

a) (X, R^{-1}) je také částečně uspořádaná množina **[1]**

b) Je-li $x \in X$ minimální prvek v (X, R), pak je maximální v (X, R^{-1}) **[1]**

Úloha 3 (Hledá se uspořádání II)
Sestrojte uspořádání (tedy buď nějaké takové uspořádání popište, nebo nakreslete jeho Hasseův diagram) splňující následující podmínky. Nezapomeňte také zdůvodnit, proč vámi nalezené uspořádání má požadované vlastnosti

a) nemá žádný minimální ani žádný maximální prvek **[1]**

b) nemá žádný nejmenší prvek a právě jeden minimální prvek **[1]**

Tahák na relace

Vlastnost	Definice	Překlad
reflexivita	$\forall x \in X : xRx$	Každý prvek je v relaci sám se sebou
symetrie	$\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$	Pokud x je v relaci s y, pak y je také v relaci s x
slabá antisymetrie	$\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$	Pro x, y různé neplatí, že by zároveň x bylo v relaci s y a y bylo v relaci s x
tranzitivita	$\forall x, y, z \in X : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$	Pokud je x v relaci s y a y je v relaci se z, pak x je v relaci se z

Relace R na množině X je *ekvivalence*, je-li reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Jsou-li dva prvky spolu v relaci R, patří do stejné třídy ekvivalence. Třídu ekvivalence definujeme jako maximální množinu prvků vzhledem k inkluzi takovou, že každé dva prvky jsou spolu v R.
Ekvivalence je jednoznačně určena svými třídami.

Relace R na množině X je *částečné uspořádání*, je-li reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní.
Navíc, platí-li, že $\forall x, y \in X : xRy \vee yRx$, nazýváme R lineární uspořádání.
Dále dvojici (X, R) zveme částečně uspořádanou množinou (č. u. m.).

Prvek n je *největší* prvek č. u. m. $(X, \preceq)$, pokud $\forall x \in X : x \preceq n$.
Prvek m je *maximální* prvek č. u. m. $(X, \preceq)$, pokud $\forall x \in X : m \preceq x \Rightarrow m = x$.
Nejmenší a minimální prvek definujeme analogicky.

Řetězec C v č. u. m. $(X, \preceq)$ je množina navzájem porovnatelných prvků (tj. $\forall x, y \in C : x \preceq y \vee y \preceq x$).
Antiřetězec A v č. u. m. $(X, \preceq)$ je množina po dvou neporovnatelných prvků.