Domácí úkol 2

`https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/`

Zadáno 12. 10. 2021

Odevzdejte do 2. 11. 2021 8:59

Diskrétní matematika

`chmel@kam.mff.cuni.cz`

Úloha 1 (Kde je chyba?)
Nalezněte chybu v důkazu následujícího (neplatného) tvrzení.

Tvrzení. Uvažme posloupnost čísel $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definovanou rekurentně: $a_0 = 0, a_1 = 1, \forall n \geq 2 : a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$. Pak $\forall n \geq 1 : a_n = 2^{n-1}$.

Důkaz. Budeme dokazovat indukcí. Bázi pro $n = 1$ snadno ověříme: $a_1 = 1 = 2^{1-1}$.

Nyní provedeme indukční krok, předpokládáme, že $\forall k < n : a_k = 2^{k-1}$ a chceme ukázat platnost tvrzení pro $n > 1$. Tím společně s definicí a_n dostáváme:

$$a_n \stackrel{\text{definice}}{=} a_{n-1} + 2a_{n-2} \stackrel{IP}{=} 2^{n-2} + 2 \cdot 2^{n-3} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}.$$

□

Pozor, opravdu mě zajímá, kde je v důkazu chyba, ne jen to, že umíte ukázat, že tvrzení neplatí protipříkladem. **[3]**

Úloha 2 (Je sjednocení potenčních množin potenční množina sjednocení?)
Místo podtržítka doplňte jedno z $\subset$, $\supset$, $=$ a svou odpověď zdůvodněte: $\mathcal{P}(A \cup B) \_ \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. **[2]**