Domácí úkol 10

https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/ Zadáno 27. 12. 2021

Odevzdejte do 31. 1. 2022

Diskrétní matematika chmel@kam.mff.cuni.cz

Na úkoly máte čas až do konce ledna. Pokud budete potřebovat termín prodloužit, napište mi před termínem a ještě vám deadline prodloužím, ale ne déle než do konce zkouškového.

Úloha 1 (Závod)
Pavel se připravuje na střelecké závody. Ví, že u každé rány má pravděpodobnost zásahu $p = \frac{3}{5}$ a všechny výstřely jsou na sobě nezávislé.

1. Jaká je střední hodnota počtu Pavlových zásahů po deseti ranách? A po šedesáti? **[2]**

2. Jaká je pravděpodobnost, že z deseti ran bude Pavel mít nejvýše sedm zásahů? **[1]**

Úloha 2 (Rozstřel)
Matthew, David a Jiří se na Olympijských hrách rozstřelují o medaile. Všichni už jsou celkem nervózní, takže mají poměrné nízké pravděpodobnosti zásahu terče, konkrétně Matthew zasáhne s pravděpodobností 0.2, David s pravděpodobností 0.4 a Jiří s pravděpodobností 0.6, nezávisle na sobě. Každý vystřelil na jeden terč a víme, že se do svého terče se trefili dva ze tří závodníků. Určete pro každého závodníka podmíněnou pravděpodobnost, že zasáhl svůj terč. **[3]**

Definice 1 (Pravděpodobnostní prostor)
Pravděpodobnostní prostor je trojice $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, kde

- Ω je množina elementárních jevů
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je množina jevů
- $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ je pravděpodobnostní funkce splňující:
  - $P(\emptyset) = 0$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Pro disjunktní $A, B \in \mathcal{F}$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Navíc řekneme, že pravděpodobnostní prostor je *diskrétní*, pokud Ω je nejvýše spočetná a $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
Dále je diskrétní pravděpodobnostní prostor *konečný*, pokud Ω je konečná.
Konečný pravděpodobnostní prostor je navíc *klasický*, pokud $\forall A \in \mathcal{F} : P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Definice 2 (Podmíněná pravděpodobnost)
Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B je $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (pokud $P(B) > 0$).

Definice 3 (Nezávislé jevy)
Jevy A, B jsou nezávislé, jestliže $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ (což je při $P(B) > 0$ ekvivalentní s tím, že $P(A|B) = P(A)$).
Jevy $A_1, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, jestliže $\forall I \subseteq [n] : P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

Věta 1 (Bayesova)
Pro jevy $A, B \subseteq \Omega$ s kladnou pravděpodobností platí: $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$.

Definice 4 (Náhodná veličina)
Náhodná veličina X je libovolná funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Definice 5 (Střední hodnota)
Střední hodnota (diskrétní) náhodné veličiny X je $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\{\omega\})$

Definice 6 (Indikátor)
Indikátor jevu $A \in \mathcal{F}$ je náhodná veličina $\Omega \to \{0, 1\}$ definovaná jako

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{, pokud} \omega \in A \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Věta 2 (Linearita střední hodnota)
Nechť X, Y jsou náhodné veličiny, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak

$$\mathbb{E}[\alpha X + \beta Y] = \alpha \mathbb{E}[X] + \beta \mathbb{E}[Y]$$