

## 9. cvičení

Diskrétní matematika, 7. 12. 2021

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/>

### Úloha 1 (Určení skóre)

Je následující posloupnost skóre nějakého grafu? Pokud ano, nakreslete jej, pokud ne, zdůvodněte.

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5) | e) (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)    |
| b) (1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)       | f) (3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3) |
| c) (1, 1, 2, 3, 3, 6)             | g) (0, 1, 2, ..., $n - 1$ )       |
| d) (1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)          | h) (1, 2, 3, ..., $n - 1$ )       |

### Úloha 2 (Neizomorfní grafy se stejným skóre)

Najděte příklad dvou neizomorfních grafů se stejným skóre. Co kdybychom chtěli, aby oba grafy byly souvislé?

### Úloha 3 (Máme kostru, jsme tedy souvislí)

Rozmyslete si, že graf má kostru, právě když je souvislý.

### Úloha 4 (Stromy jsou 1-degenerované)

Ukažte, že pro každý strom s  $n$  vrcholy existuje pořadí vrcholů  $\{v_1, \dots, v_n\}$  takové, že pro každé  $i > 1$  platí, že  $v_i$  má právě jednoho souseda v množině  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ .

Uvědomte si, že toto můžeme použít k důkazu, že stromy jsou bipartitní.

### Úloha 5 (Skóre stromu)

Mějme posloupnost  $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  takovou, že  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ . Dokažte, že  $(d_1, \dots, d_n)$  je skóre stromu.

### Úloha 6 (O počtu listů stromu s vrcholem vysokého stupně)

Dokažte, že pokud v konečném stromu  $T$  existuje vrchol stupně  $k$ , tak potom  $T$  má alespoň  $k$  listů.

---

### Bonusové úlohy

### Úloha 7 (Počet listů a vnitřní stupně 3)

Mějme strom, který má  $l$  listů a  $v$  vnitřních vrcholů, kde každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí  $l = v + 2$ .

### Úloha 8 (Nezávislá množina ve stromě)

Ukažte, že každý strom na  $n$  vrcholech má *nezávislou množinu* velikosti alespoň  $\lceil n/2 \rceil$ . (Nezávislá množina je  $S \subseteq V(G)$  taková, že  $\forall u, v \in S : \{u, v\} \notin E(G)$ , tj. množina vrcholů taková, že žádná dvojice z této množiny není spojena hranou.)

### Úloha 9 (Pálení mostů)

Bud'  $G$  souvislý graf a  $e$  most v  $G$ . Rozmyslete si následující pozorování (do jisté míry spolu související):

- Každá kostra  $G$  obsahuje  $e$
- $G \setminus e$  nemá žádnou kostru
- Kontrakcí  $e$  se počet koster nezmění