8. cvičení

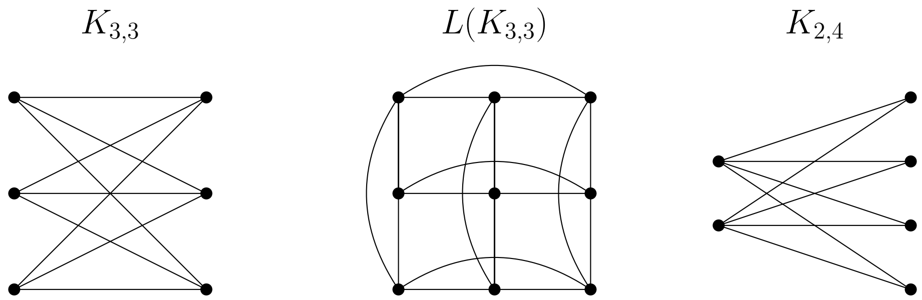
Úloha 1 (Ohodnotíme grafy)
Mějme graf $G = (V, E)$ a k němu máme navíc ještě funkci $\ell : E \to D$ určující délky hran. Můžeme tak přirozeně rozšířit definici délky sledu $v_0 e_1 \dots e_k v_k$ jako $\ell(e_1) + \dots + \ell(e_k)$ a zadefinujeme $d : V \times V \to D$ tak, že $d(u, v)$ je délka nejkratší cesty z u do w. Bude taková funkce stále metrika, jestliže zvolíme D následovně?

1. $D = \mathbb{R}$ (všechna reálná čísla)
2. $D = \mathbb{R}_0^+$ (nezáporná reálná čísla)
3. $D = \mathbb{R}^+$ (kladná reálná čísla)

Úloha 2 (Trojúhelníky jsou nudné, spočítáme si čtyřcykly!)
Z přednášky víme, že pro matici sousednosti A grafu G platí, že $(A^k)_{i,j}$ odpovídá sledům délky k z vrcholu v_i do vrcholu v_j. Díky tomu umíme také spočítat počet trojúhelníků v grafu. Zkuste totéž pro čtyřcykly!

Úloha 3 (Přátelství)
Uvědomte si, že na Facebooku je sudý počet lidí s lichým počtem přátel.
(Může se vám hodit princip sudosti z přednášky.)

Úloha 4 (Je eulerovský?)
Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské:



Úloha 5 (Město bez mostu)
Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Úloha 6 (Sudě regulární graf)
Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak buď k nebo $|V_G|$ je sudé.

Úloha 7 (Hamiltonovské kružnice)
Rozhodněte, zda grafy z úlohy 3 mají Hamiltonovskou kružnici.

Bonusové úlohy

Úloha 8 (Součet prvků matice sousednosti)
Nechť G je graf a $A \in \{0, 1\}^{n \times n}$ je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků A, tedy $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Úloha 9 (A co když se trošku pootevřeme?)
Nalezněte podmínku podobnou větě o eulerovských grafech pro souvislé grafy, které mají *nějaký* eulerovský tah (tedy může být uzavřený nebo otevřený).

Úloha 10 (Minimální cesta)
Dokažte, že každý graf má cestu délky $\delta(G) = \min_{v \in V} \deg(V)$.