

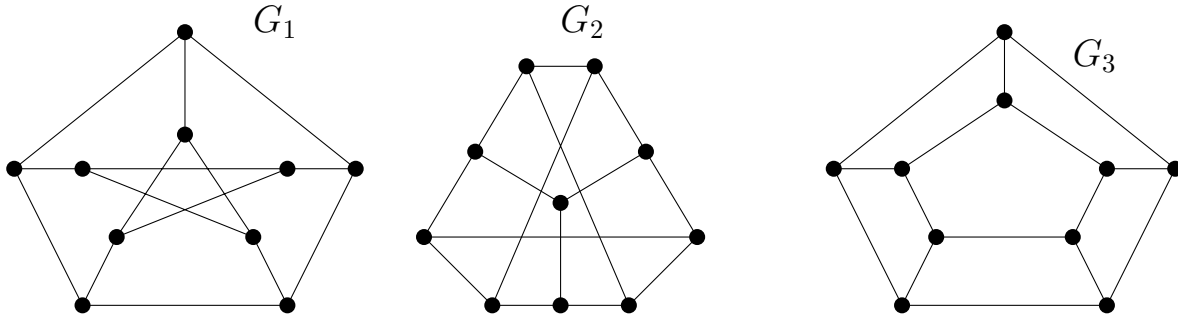
7. cvičení

Diskrétní matematika, 23. 11. 2021

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/>

Úloha 1 (Izomorfní grafy)

Rozhodněte, zda jsou následující grafy izomorfní.



Úloha 2 (Izomorfní standardní grafy)

Které ze „standardních“ grafů $K_n, I_n, P_n, C_n, K_{m,n}$ jsou izomorfní?

Pro připomenutí:

- $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$ - úplný graf na n vrcholech
- $I_n = ([n], \emptyset)$ - nezávislá množina na n vrcholech
- $P_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\})$ cesta délky $n-1$ na n vrcholech
- $C_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{1, n\}\})$ - cyklus na n vrcholech
- $K_{m,n} = (\{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}, \{\{a_i, b_j\} : i \in [m], j \in [n]\})$ - úplný bipartitní graf s partitami velikosti m a n .

Úloha 3 (Izomorfismus doplňků)

Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní, právě když jejich doplňky jsou izomorfní.

Úloha 4 (Bipartitní doplněk bipartitního grafu)

Existuje bipartitní graf na alespoň pěti vrcholech, jehož doplněk je také bipartitní?

Úloha 5 (Liché podgrafy)

Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako *indukovaný* podgraf.

Bonusové úlohy

Úloha 6 (Přátelství)

Uvědomte si, že na Facebooku je sudý počet lidí s lichým počtem přátel.

Úloha 7 (Izomorfismus doplňku)

Najděte nějaký graf (na více než jednom vrcholu), který je izomorfní svému doplňku.

Úloha 8 (Zakázané podgrafy)

Popište všechny grafy, které jako podgraf neobsahují cestu délky 2. A co s cestou délky 3?

Definice 1 (Graf a jeho doplněk, stupeň vrcholu)

Graf G je uspořádaná dvojice (V, E) , kde V je (neprázdná) množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

Doplňkem grafu G je graf $\bar{G} = (V, \bar{E})$, kde $\bar{E} = \binom{V}{2} \setminus E$.

Řekneme, že stupeň vrcholu $v \in V$ v grafu G (značeno $\deg_G(v)$) je počet hran, jež v obsahuje.

Definice 2 (Izomorfismus grafů)

Říkáme, že grafy $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ jsou izomorfní (značeno $G \cong H$), jestliže existuje bijekce $f : V_G \rightarrow V_H$ taková, že $\forall u, v \in V_G : (\{u, v\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_H)$ (tj. bijektivní zobrazení mezi vrcholy G a H , které zároveň zachovává hrany). Takovému zobrazení říkáme izomorfismus grafů.

Definice 3 (Bipartitní graf)

Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud existují disjunktní množiny V_1, V_2 takové, že $V_1 \cup V_2 = V$ a mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana. Množiny V_1, V_2 nazýváme partity.

Definice 4 (Podgraf, indukovaný podgraf)

Řekneme, že $H = (V_H, E_H)$ je

- podgrafem grafu $G = (V_G, E_G)$, pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq \binom{V_H}{2} \cap E_G$
- indukovaným podgrafem grafu $G = (V_G, E_G)$, pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H = \binom{V_H}{2} \cap E_G$