

## 5. cvičení

Diskrétní matematika, 9. 11. 2021

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/>

### Úloha 1 (Vnořené podmnožiny)

Kolik je uspořádaných dvojic  $(A, B)$ , kde  $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ?

Výsledek:  $3^n$ .

### Úloha 2 („War never changes“)

Země Blahónie, Apátie a Erózie jsou ve válce. Víme, že Blahónie má 5000 vojáků, Apátie má 6000 vojáků a Erózie má 4000 vojáků. Zároveň víme, že někteří vojáci (špioni) jsou zapsaní i ve více armádách. Konkrétně blahónijsko-apátijských vojáků je 250, apátijsko-erózijských vojáků je 300 a bláhónijsko-erózijských vojáků je 200. Ve všech třech armádách je zapsáno 50 vojáků.

Kolik vojáků se celkem účastní války?

Výsledek: 14 300.

### Úloha 3 (Uvažujeme kombinatoricky)

Dokažte jak výpočtem tak kombinatorickou úvahou, že:

a)  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b)  $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

### Úloha 4 (Pěšky po Manhattanu)

Po prohlídce National Museum of Mathematics stojíte na Manhattanu na rohu 26. street a 5. avenue a rádi byste se dostali na vlak do Penn Station, která má vstup na rohu 32. street a 7. avenue. Kolika způsoby se můžete na vlak dostat, pokud půjdete pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem?

*Chození severozápadním směrem zvyšuje číslo avenue, severovýchodním směrem zvyšuje číslo street. Předpokládejte, že v této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratk a slepých nebo přerušovaných ulic. (Tedy nemůžete chodit po Broadwayi.)*

Výsledek:  $\binom{8}{2} = 28$ .

### Úloha 5 (Stavba)

Stavař Pavel nabírá dělníky pro stavbu nového domu. Každý z 80 dělníků, kteří se přihlásili do náboru, ovládá alespoň jednu z profesí: zedník, tesař, malíř, dokonce jich 15 ovládá všechny tři profese. Dále Pavel zjistil, že zdít umí 50 zájemců o práci a že mezi zájemci je i stejný počet malířů. Tesařské řemeslo ovládá jen 45 zájemců. Kolik by Pavel najal pracovníků, kdyby vybral všechny takové, co ovládají právě dvě profese? Výsledek: 35.

### Úloha 6 (Cenzura)

Určete, kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN, RAZIE.

$$\text{Výsledek: } 11! - \left( \frac{11!}{3!} + \frac{11!}{3!} + \frac{11!}{5!} - \frac{11!}{3!3!} - 5 \frac{11!}{7!} - 0 + 0 \right) = 27\,426\,960.$$

### Úloha 7 (Královský pat)

Kolika způsoby můžete rozestavit černého a bílého krále na šachovnici  $8 \times 8$  tak, aby se navzájem neohrožovali?

$$\text{Výsledek: } 4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612.$$

### Úloha 8 (Ples)

Na plese je  $n$  párů. Kolik je rozdělení do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?

(*Hint: nemusíte vyčíslovat, pokud se vám podaří využít nějaký výsledek z přednášky, naprosto to postačuje.*)

Výsledek: šatnářčino číslo  $s(n)$ .

### Úloha 9 (Křížící se tětivy)

Kolik je v konvexním  $n$ -úhelníku dvojic tětív, jež se navzájem protínají uvnitř  $n$ -úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?

$$\text{Výsledek: } \binom{n}{4}.$$