4. cvičení

Diskrétní matematika, 2. 11. 2020 https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/

Úloha 1 (Rozsekávání ekvivalencí)
Ukažte, že následující relace jsou ekvivalence a popište jejich ekvivalenční třídy.

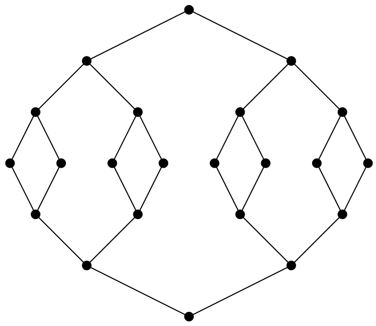
a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 7|(x - y)\}$
b) $R_2 = \{(x, y) \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2 : x|y \wedge y|x\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$

Úloha 2 (Složková uspořádání)
Uvažme množinu $X = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Na této množině definujeme relace $\leq_{\text{lex}}$ a $\preceq$ následovně:

- $(a, b) \preceq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c \wedge b \leq d$,
- $(a, b) \leq_{\text{lex}} (c, d) \Leftrightarrow a < c \vee (a = c \wedge b \leq d)$ (tzv. lexikografické uspořádání).

Ukažte, že obě relace opravdu jsou částečná uspořádání. Je některé z nich lineární?
Nakreslete Hasseův diagram $\preceq$. Jak vypadají jeho největší, nejmenší, minimální, maximální prvky?

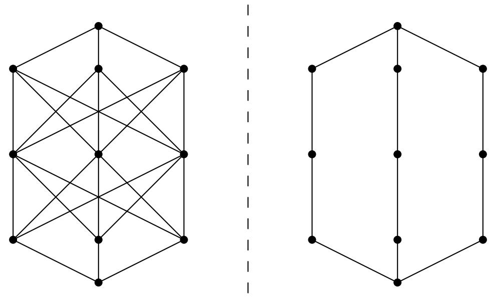
Úloha 3 (Řetězce a antiřetězce)
V následujícím Hasseově diagramu nalezněte největší řetězec a antiřetězec.



Úloha 4 (Hledá se uspořádání)
Rozhodněte, zda existuje neprázdné uspořádání splňující danou podmínku. Pokud ano, uveďte nějaký příklad.

a) bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině
b) bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině
c) bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině
d) bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině

Úloha 5 (Lineární rozšíření)
Kolika způsoby lze rozšířit následující dvě částečná uspořádání reprezentovaná Hasseovými diagramy na lineární uspořádání?



Úloha 6 (Zvláštní lineární uspořádání)
Najděte lineární uspořádání, v němž má každý prvek bezprostředního předchůdce, ale ne každý prvek má bezprostředního následníka.