3. cvičení

Úloha 1 (Cože?)
Nalezněte relaci na neprázdné množině, která je zároveň symetrická i antisymetrická.
Poté najděte relaci, která není ani symetrická, ani antisymetrická.

Úloha 2 (Vlastnosti upravených relací)
Buďte R, S reflexivní relace. Které z následujících relací jsou také reflexivní?

a) $R \cup S$
b) $R \cap S$
c) $R \setminus S$
d) $R \triangle S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$
e) $R \circ S$
f) R^{-1}

A co pro symetrické relace?

Úloha 3 (Relační průzkum)
Rozhodněte, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické. Dále rozhodněte, zda se jedná o ekvivalence či částečná uspořádání.

a) $X = \{a, b, c\}, R_1 = \{(a, a), (a, c), (b, b), (c, a), (c, c)\}$
b) $R_2 = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \leq b\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$
d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + y = 10\}$
e) $R_5 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}^2 : \mathrm{NSD}(x, y) = 1\}$

Úloha 4 (Počty relací)
Určete počet relací na čtyřech prvcích, které jsou:

a) libovolné
b) reflexivní
c) symetrické
d) antisymetrické

Co kdyby byl počet prvků n?

Úloha 5 (Skládání relací)
Jak vypadá relace $R \circ R$, jestliže relace R je

a) rovnost $=$ na $\mathbb{N}$
b) ostré menší než $<$ na $\mathbb{N}$
c) menší nebo rovno $\leq$ na $\mathbb{N}$
d) ostré menší než $<$ na $\mathbb{R}$

Úloha 6 (Antisymetrické podmnožiny)
Buď R antisymetrická relace na X. Ukažte, že každá relace $S \subset R$ je také antisymetrická.