2. cvičení

Diskrétní matematika, 12. 10. 2021 `https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/`

Úloha 1 (Železník a Bukefalus měli stejnou barvu?)
Najděte chybu v důkazu následujícího tvrzení: *Všichni koně mají stejnou barvu.*

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle počtu koní (označíme jej n).
Báze: $n = 1$ – jeden kůň má jistě stejnou barvu jako on sám.
Indukční krok: Nyní mějme $n \geq 2$, předpokládáme platnost pro $n - 1$ a označme si koně $K_1, \ldots, K_n$. Uvážíme prvních $n-1$ koní $K_1, \ldots, K_{n-1}$, kteří z indukčního předpokladu mají stejnou barvu. Stejně tak posledních $n-1$ koní $K_2, \ldots, K_{n-1}, K_n$ má z indukčního předpokladu stejnou barvu. Ovšem kůň K_{n-1} byl v obou skupinách, a tedy všech n koní musí mít stejnou barvu. □

Úloha 2 (Šachovnice bez políčka)
Na šachovnici $2^n \times 2^n$ chybí jedno libovolné políčko. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru L, které zabírají tři políčka.

Úloha 3 (Množiny)
Místo podtržítek doplňte vždy jedno z $\subset$, $\supset$, $=$:

a) $\bigcup_{i=0}^{\infty} \{X : X \subseteq \mathbb{N} \wedge |X| = i\} \_ \mathcal{P}(\mathbb{N})$

b) $\mathcal{P}(A \cap B) \_ \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Úloha 4 (Množinová distributivita)
Dokažte následující rovnosti:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)$

Úloha 5 (Rovnost množin a potenčních množin)
Je pravda, že pro každé dvě množiny X a Y platí, že $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(Y)$, právě když $X = Y$? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, ukažte protipříklad.

Další důkazy

Úloha 6 (Fibonacci)
Posloupnost Fibonacciho čísel je definována následovně: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $F_n \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.
Hint: může se hodit fakt, že $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$

Úloha 7 (Školka u kulatého stolu)
Kolem kulatého stolu sedí 22 dětí: 11 děvčat a 11 chlapců. Ukažte, že nezávisle na rozsazení existuje dítě (ne nutně chlapec), které sedí mezi dvěma děvčaty. Jaká je situace pro 12 děvčat a 10 chlapců, případně 10 děvčat a 12 chlapců?

Úloha 8 (Mravenci na tyči)
Na tyči délky 1 metr je po centimetru rozmístěno 101 mravenců. Ti směřují buď vlevo nebo vpravo a pohybují se rychlostí 1 cm/s. Na tyči je málo místa, takže pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout, a tedy se otočí a pokračují opačným směrem. Když dojdou na okraj tyče, spadnou. Ukažte, že za 101 vteřin na tyči už jistě nebudou žádní mravenci.

Úloha 9 (Čokoládová hra)
Dva hráči lámají čokoládu velikosti $2m \times n$. Lámání má stejná pravidla jako v úloze o čokoládě z minulého cvičení, ale navíc se nesmí odlamovat kousky velikosti 1×1. Rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Úloha 10 (Šachovnice bez rohů)
Ze šachovnice velikosti 8×8 odstraníme políčka ve dvou protilehlých rozích. Je nyní možné pokrýt šachovnici dominovými kostkami 2×1?

Úloha 11 (Šachovnice s rohy)
Je možné šachovnici 10×10 pokrýt T-tetrominy? (T-tetromino je dílek skládající se ze čtyř čtverečků ve tvaru písmene T.)