1. cvičení

Diskrétní matematika, 5. 10. 2021 `https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2122/dm/`

Úloha 1 (Výroky)
Nechť M označuje množinu osob v posluchárně a nechť predikát $Z(x,y)$ pro $x,y \in M$ znamená „osoba x zná příjmení osoby y“. Zkoumejte platnost následujících výroků:

a) $\forall x \in M\, \exists y \in M : Z(x,y)$
b) $\forall y \in M\, \exists x \in M : Z(x,y)$
c) $\forall x \in M\, \exists y \in M \setminus \{x\} : Z(x,y)$
d) $\forall y \in M\, \exists x \in M \setminus \{y\} : Z(x,y)$
e) $\exists x \in M\, \forall y \in M : Z(x,y)$
f) $\exists y \in M\, \forall x \in M : Z(x,y)$

Úloha 2 (Typy důkazů)
Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : 4 | (2n^2 + 2n)$

a) přímo
b) sporem
c) matematickou indukcí

Úloha 3 (Čokoláda)
Uvažte tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete mn jednotlivých dílků.
Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

Úloha 4 (Vzorečky)
Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$
b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Úloha 5 (Šachovnice)
Na šachovnici $2^n \times 2^n$ chybí jedno libovolné políčko. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru L, které zabírají tři políčka.

Úloha 6 (Chybný důkaz)
Najděte chybu v důkazu následujícího tvrzení: *Všichni koně mají stejnou barvu.*

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle počtu koní (označíme jej n).
Báze: $n = 1$ – jeden kůň má jistě stejnou barvu jako on sám.
Indukční krok: Nyní mějme $n \geq 2$, předpokládáme platnost pro $n-1$ a označme si koně $K_1, \ldots, K_n$. Uvážíme prvních $n-1$ koní $K_1, \ldots, K_{n-1}$, kteří z indukčního předpokladu mají stejnou barvu. Stejně tak posledních $n-1$ koní $K_2, \ldots, K_{n-1}, K_n$ má z indukčního předpokladu stejnou barvu. Ovšem kůň K_{n-1} byl v obou skupinách, a tedy všech n koní musí mít stejnou barvu. $\square$

Úloha 7 (Fibonacci)
Posloupnost Fibonacciho čísel je definována následovně: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,
b) $F_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$,
c) $2 | F_n \Leftrightarrow 3 | n$.

Úloha 8 (Dělení roviny)
Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{n^2+n}{2}$.