# Domácí úkol 9

https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/ Odevzdejte do 31. 1. 2021 23:59 na Moodle

Diskrétní matematika chmel@kam.mff.cuni.cz

Na úkoly máte čas až do konce ledna. Pokud byste ještě potřebovali víc času, napište mi, a čas vám prodloužím (ale nejpozději do konce zkouškového). Pokud budete úkoly na Moodle odevzdávat po posledním cvičení, napište mi také, prosím, e-mail (nebo je rovnou odevzdejte e-mailem). Moodle totiž během zkouškového už nebudu kontrolovat tak často.

**Úloha 1** (Pěticykly a delší)
Určete, jaký největší počet hran může obsahovat takový rovinný graf, který neobsahuje žádné kružnice délky 3 a 4. **[3]**

**Úloha 2** (Abychom měli hodně barevný graf, musí mít hodně hran)
Dokažte, že pokud je graf dobře obarvitelný $k$ barvami ale už ne $k-1$ barvami, pak má takový hran alespoň $\binom{k}{2}$ hran. **[4]**
*Hint: zkuste to dokázat sporem – ukažte, že pokud by měl graf méně než* $\binom{k}{2}$ *hran, pak můžeme dvě barvičky spojit do jedné a nic nám to nepokazí.*

**Úloha 3** (Nejkratší cesta v minimální kostře)
Platí tvrzení „V každé minimální kostře každého ohodnoceného grafu je pro každou dvojici vrcholů $u, v$ nějaká nejkratší cesta mezi $u$ a $v$“? **[1]**

**Úloha 4** (Kouzelně barevné grafy)
Graf $G$ nazveme *oktarínovým*[1], pokud

- se jedná o graf na jednom vrcholu $G = (\{1\}, \emptyset)$, nebo
- jsme jej vytvořili z nějakého jiného *oktarínového* grafu tak, že přidáme dva nové vrcholy $u, v$ spojené hranou, které spojíme s dalšími vrcholy v tom grafu – oba se stejnými a alespoň s jedním.

Rozhodněte, zda pro každý oktarínový graf $G$ platí či neplatí následující:

1. $G$ je eulerovský
2. $G$ je rovinný
3. $G$ je bipartitní
4. $G$ má Hamiltonovskou kružnici (tj. kružnici procházející všemi vrcholy)
5. $G$ neobsahuje cyklus délky 6

Máte tedy buď dokázat, že daná vlastnost platí pro všechny oktarínové grafy, nebo že pro všechny oktarínové grafy neplatí, nebo nalézt dva oktarínové grafy: jeden mající danou vlastnost a druhý, který tutéž vlastnost nemá. **[5]**

**Úloha 5** (Vysoké stupně v rovinném grafu znamenají mnoho vrcholů)
Dokažte, že každý rovinný graf se všemi vrcholy stupně 5 má alespoň 12 vrcholů. **[2]**

[1] Tento název používáme jen pro tuto úlohu, není nijak standardizovaný.