Domácí úkol 6

`https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/` Odevzdejte do 9. 12. 2020 12:20 na Moodle

Diskrétní matematika chmel@kam.mff.cuni.cz

Úloha 1 (Souvislý graf i doplněk)
Najděte graf G takový, že G i jeho doplněk $\overline{G}$ jsou souvislé. **[1]**

Úloha 2 (Line graphy a eulerovskost)
Jako line graph grafu $G = (V, E)$ definujeme graf $L(G) = (E, X)$, kde $X = \{\{e_1, e_2\} \in \binom{E}{2} : e_1 \cap e_2 \neq \emptyset\}$.
Slovně: line graph $L(G)$ grafu G je graf, jehož vrcholy jsou hrany původního grafu G a dva vrcholy line graphu (hrany v G) jsou spojeny hranou v $L(G)$, pokud v grafu G sdílejí vrchol.
Ukažte, že když je graf G eulerovský, pak i jeho line graph $L(G)$ je eulerovský.
Hint: máte větu z přednášky, která charakterizuje eulerovské grafy, tak tu větu využijte. **[4]**

Úloha 3 (d-regularita)
Dokažte, že pokud graf G i jeho doplněk $\overline{G}$ jsou oba d-regulární, pak mají lichý počet vrcholů.
Návod:

- Nejprve ukažte, že pokud je G k-regulární, pak $\overline{G}$ je ℓ-regulární (pro nějaké ℓ).
- Dále dokažte opačnou implikaci.
- Rozmyslete si, jaký je vztah mezi k a ℓ (bude se vám hodit počet vrcholů G).
- Když už máte takový vztah, stačí prozkoumat, co se stane, když bude platit rovnost $k = \ell$.

Samozřejmě můžete tvrzení dokazovat i jinak. **[3]**