# 9. cvičení

Diskrétní matematika, 2. 12. 2020 https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/

**Definice 1** (Skóre grafu)
Buď $G = (V, E)$ graf, kde $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Pak posloupnost $(\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n))$ nazýváme *skórem* grafu $G$.
*Konvence*: dvě skóre považujeme za stejná, pokud se liší jen pořadím čísel.

**Věta 1** (Věta o skóre)
Nechť $D = (d_1, \ldots, d_n)$ je posloupnost taková, že $\forall i \in [n] : d_i \in \mathbb{N}_0$ a $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$.
Pak $D$ je skóre nějakého grafu, právě když $D'(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$ je skóre nějakého grafu, kde $d'_i = d_i$ pro $i < n - d_n$, $d'_i = d_i - 1$ pro $i \geq n - d_n$

**Definice 2** (Biologické pojmy - strom, les, list a kostra)
Řekneme, že graf $G$ je *strom*, jestliže je souvislý a neobsahuje žádný cyklus.
Dále řekneme, že graf $G$ je *les*, jestliže neobsahuje žádný cyklus.
Vrchol $v$ grafu $G$ je *list*, jestliže $\deg_G(v) = 1$.
Řekneme, že graf $T = (V_T, E_T)$ je *kostrou* grafu $G = (V, E)$, pokud $V_T = V$ a zároveň $T$ je strom.

**Lemma 1** (O olistěných stromech)
Každý strom na alespoň dvou vrcholech má alespoň dva listy.

**Lemma 2** (O trhání listů)
Nechť $G$ je graf a $v$ je jeho list. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $G$ je strom
2. $G - v$ (graf vzniklý z $G$ odebráním vrcholu $v$) je strom

**Věta 2** (Ekvivalentní charakterizace stromu)
Buď $G = (V, E)$ graf. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $G$ je strom
2. $\forall x, y \in V$ existuje právě jedna cesta z $x$ do $y$
3. $G$ je souvislý a vynecháním libovolné hrany vznikne nesouvislý graf
4. $G$ nemá kružnici a přidáním libovolné hrany vznikne kružnice
5. $G$ je souvislý a $|V| = |E| + 1$

**Úloha 1** (Určení skóre)
Je následující posloupnost skóre nějakého grafu? Pokud ano, nakreslete jej, pokud ne, zdůvodněte.

a) $(1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5)$
b) $(1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4)$
c) $(1, 1, 2, 3, 3, 6)$
d) $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6)$
e) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$
f) $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$
g) $(0, 1, 2, \ldots, n - 1)$
h) $(1, 2, 3, \ldots, n - 1)$

**Úloha 2** (Neizomorfní grafy se stejným skóre)
Najděte příklad dvou neizomorfních grafů se stejným skóre. Co kdybychom chtěli, aby oba grafy byly souvislé?

**Úloha 3** (Máme kostru, jsme tedy souvislí)
Rozmyslete si, že graf má kostru, právě když je souvislý.

**Úloha 4** (Stromy jsou 1-degenerované)
Ukažte, že pro každý strom s $n$ vrcholy existuje pořadí vrcholů $\{v_1, \ldots, v_n\}$ takové, že pro každé $i > 1$ platí, že $v_i$ má právě jednoho souseda v množině $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

**Úloha 5** (Skóre stromu)
Mějme posloupnost $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

**Úloha 6** (O počtu listů stromu s vrcholem vysokého stupně)
Dokažte, že pokud v konečném stromu $T$ existuje vrchol stupně $k$, tak potom $T$ má alespoň $k$ listů.

**Úloha 7** (Počet listů a vnitřní stupně 3)
Mějme strom, který má $l$ listů a $v$ vnitřních vrcholů, kde každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.