8. cvičení

Diskrétní matematika, 25. 11. 2020 https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/

Úloha 1 (Ještě jednou počítáme dvěma způsoby)
Sportovně střelecký klub má 100 členů a v poslední sezóně se jeho členové účastnili 10 závodů. Každého závodu se zúčastnilo nejvýše 30 členů klubu. Ukažte, že existují dva členové klubu, kteří se v poslední sezóně neúčastnili stejného závodu.

Úloha 2 (Přátelství)
Uvědomte si, že na Facebooku je sudý počet lidí s lichým počtem přátel.
(Může se vám hodit princip sudosti z přednášky.)

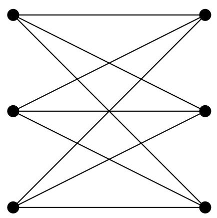
Definice 1 (Souvislost)
Graf G je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy $u, v \in V(G)$ existuje cesta v G s krajními vrcholy u a v.

Definice 2 (Tahy)
Posloupnost $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_n)$ je *tah* v grafu G, jestliže $\forall i \in [n] : v_i \neq v_{i-1}, \forall i \in [n] : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}, \forall i, j \in [n] : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$ (tedy se jedná o posloupnost střídavě vrcholů a hran takovou, že hrana je vždy mezi dvěma vrcholy, které spojuje a žádná hrana se v tahu nevyskytuje dvakrát).
Tah je *uzavřený*, jestliže $v_0 = v_n$.
Tah je *eulerovský*, jestliže se v něm každá hrana vyskytuje aspoň jednou (tedy právě jednou).

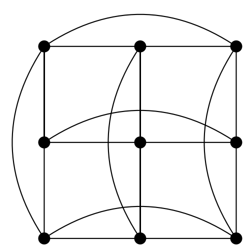
Věta 1 (O eulerovských grafech)
Souvislý graf je eulerovský (tj. má uzavřený eulerovský tah), právě když má všechny stupně sudé.

Úloha 3 (Je eulerovský?)
Rozhodněte, zda jsou následující grafy eulerovské:

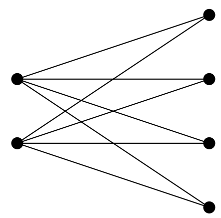
$K_{3,3}$



$L(K_{3,3})$



$K_{2,4}$



Úloha 4 (A co když se trošku pootevřeme?)
Nalezněte podmínku podobnou předchozí větě pro souvislé grafy, které mají *nějaký* eulerovský tah (tedy může být uzavřený nebo otevřený).

Úloha 5 (Město bez mostu)
Dokažte, že graf se všemi stupni sudými neobsahuje most, tedy hranu, jejímž odebráním se zvýší počet komponent.

Definice 3 (Regularita)
Řekneme, že graf G je k-regulární, jestliže každý jeho vrchol má stupeň k.

Úloha 6 (Sudě regulární graf)
Ukažte, že pokud má $2k$-regulární graf sudý počet hran, tak buď k nebo $|V_G|$ je sudé.

Definice 4 (Hamiltonovská kružnice)
Hamiltonovská kružnice grafu G je kružnice, která je podgrafem grafu G a zároveň obsahuje všechny jeho vrcholy.

Věta 2 (Karp, 1972)
Je NP-těžké rozhodnout, zda má daný graf G Hamiltonovskou kružnici. (Tedy neznáme žádný algoritmus, který by ji byl schopen nalézt v polynomálním čase a obecně se má za to, že takový algoritmus neexistuje. Pokud nám ale někdo nějakou Hamiltonovskou kružnici předloží, tak v polynomiálním čase snadno ověříme, že se opravdu o Hamiltonovskou kružnici.)

Úloha 7 (Hamiltonovské kružnice)
Rozhodněte, zda grafy z úlohy 3 mají Hamiltonovskou kružnici.

Bonusové úlohy

Definice 5 (Matice sousednosti)
Matice sousednosti grafu $G = (\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, E)$ je matice $A \in \{0,1\}^{n \times n}$, kde $a_{ij} = 1$, pokud $\{v_i, v_j\} \in E$ a $a_{ij} = 0$ jinak.

Úloha 8 (Součet prvků matice sousednosti)
Nechť G je graf a $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ je jeho matice sousednosti. V závislosti na počtu vrcholů a hran určete součet všech prvků A, tedy $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.