7. cvičení

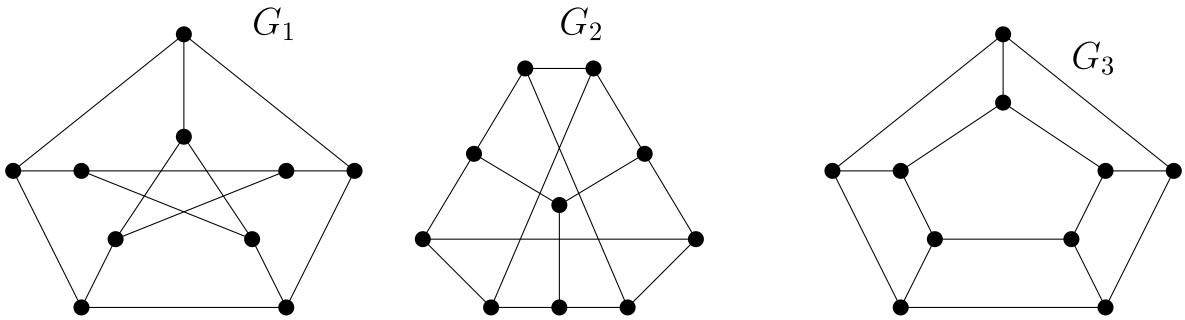
Diskrétní matematika, 18. 11. 2020 https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/

Úloha 1 (Počítáme dvěma způsoby)
Ve fotbalovém turnaji se utkalo n mužstev. Každé hrálo s každým právě jednou, přičemž ani jednou nedošlo k remíze. Označme si W_i počet výher mužstva i a L_i počet proher druhého mužstva i.
Ukažte, že $\sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} L_i$.

Definice 1 (Graf a jeho doplněk, stupeň vrcholu)
Graf G je uspořádaná dvojice (V, E), kde V je (neprázdná) množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.
Doplněk grafu G je graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, kde $\overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$.
Řekneme, že stupeň vrcholu $v \in V$ v grafu G (značeno $\deg_G(v)$) je počet hran, jež jsou s v incidentní (tj. v obsahují).

Definice 2 (Izomorfismus grafů)
Říkáme, že grafy $G = (V_G, E_G), H = (V_H, E_H)$ jsou izomorfní (značeno $G \cong H$), jestliže existuje bijekce $f : V_G \to V_H$ taková, že $\forall u, v \in V_G : (\{u, v\} \in E_G \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_H)$ (tj. zobrazení mezi vrcholy G a H, které zároveň zachovává hrany). Takovému zobrazení říkáme izomorfismus grafů.

Úloha 2 (Izomorfní grafy)
Rozhodněte, zda jsou následující grafy izomorfní.



Úloha 3 (Izomorfní standardní grafy)
Které ze „standardních“ grafů $K_n, I_n, P_n, C_n, K_{m,n}$ jsou izomorfní?
Pro připomenutí:

- $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$ - úplný graf na n vrcholech
- $I_n = ([n], \emptyset)$ - nezávislá množina na n vrcholech
- $P_n = ([n+1], \{\{i, i+1\} : i \in [n]\})$ cesta délky n na $n+1$ vrcholech
- $C_n = ([n], \{\{i, i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{1, n\}\})$ - cyklus na n vrcholech
- $K_{m,n} = (\{a_1, \dots, a_m\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}, \{\{a_i, b_j\} : i \in [m], b \in [n]\})$ - úplný bipartitní graf s partitami velikosti m a n.

Úloha 4
Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní, právě když jejich doplňky jsou izomorfní.

Definice 3 (Bipartitní graf)
Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je bipartitní, pokud existují disjunktní množiny V_1, V_2 takové, že $V_1 \cup V_2 = V$ a mezi žádnými dvěma vrcholy ze stejné množiny nevede hrana. Množiny V_1, V_2 nazýváme partity.

Úloha 5 (Bipartitní doplněk bipartitního grafu)
Existuje bipartitní graf na alespoň pěti vrcholech, jehož doplněk je také bipartitní?

Definice 4 (Podgraf, indukovaný podgraf)
Řekneme, že $H = (V_H, E_H)$ je

- podgrafem grafu $G = (V_G, E_G)$, pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H \subseteq \binom{V_H}{2} \cap E_G$
- indukovaným podgrafem grafu $G = (V_G, E_G)$, pokud $V_H \subseteq V_G$ a $E_H = \binom{V_H}{2} \cap E_G$

Úloha 6
Ukažte, že když G obsahuje lichý cyklus jako podgraf, tak potom obsahuje také nějaký lichý cyklus jako *indukovaný* podgraf.

Bonusové úlohy

Úloha 7 (Přátelství)
Uvědomte si, že na Facebooku je sudý počet lidí s lichým počtem přátel.
(Může se vám hodit princip sudosti z přednášky.)

Úloha 8 (Izomorfismus doplňku)
Najděte nějaký graf (na více než jednom vrcholu), který je izomorfní svému doplňku.

Úloha 9
Popište všechny grafy, které jako podgraf neobsahují

- cestu délky 2
- cestu délky 3