

4. cvičení

Diskrétní matematika, 21. 10. 2020

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/>

Úloha 1 (Vnořené podmnožiny)

Kolik je uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$?

Úloha 2 („War never changes“)

Země Blahónie, Apátie a Erózie jsou ve válce. Víme, že Blahónie má 5000 vojáků, Apátie má 6000 vojáků a Erózie má 4000 vojáků. Zároveň víme, že někteří vojáci (špioni) jsou zapsaní i ve více armádách. Konkrétně blahónijsko-apátíjských vojáků je 250, apátíjsko-erózijských vojáků je 300 a bláhónijsko-erózijských vojáků je 200. Ve všech třech armádách je zapsáno 50 vojáků.

Kolik vojáků se celkem účastní války?

Úloha 3 (Uvažujeme kombinatoricky)

Dokažte jak výpočtem tak kombinatorickou úvahou, že:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Úloha 4 (Pěšky po Manhattanu)

Po prohlídce National Museum of Mathematics stojíte na Manhattanu na rohu 26. street a 5. avenue a rádi byste se dostali na vlak do Penn Station, která má vstup na rohu 32. street a 7. avenue. Kolika způsoby se můžete na vlak dostat, pokud půjdete pouze severozápadním nebo severovýchodním směrem?

Chození severozápadním směrem zvyšuje číslo avenue, severovýchodním směrem zvyšuje číslo street. Předpokládejte, že v této oblasti ulice tvoří pravidelnou mřížku bez zkratk a slepých nebo přerušovaných ulic. (Tedy nemůžete chodit po Broadwayi.)

Úloha 5 (Stavba)

Stavař Pavel nabírá dělníky pro stavbu nového domu. Každý z 80 dělníků, kteří se přihlásili do náboru, ovládá alespoň jednu z profesí: zedník, tesař, malíř, dokonce jich 15 ovládá všechny tři profese. Dále Pavel zjistil, že zdít umí 50 zájemců o práci a že mezi zájemci je i stejný počet malířů. Tesařské řemeslo ovládá jen 45 zájemců. Kolik by Pavel najal pracovníků, kdyby vybral všechny takové, co ovládají právě dvě profese?

Úloha 6 (Cenzura)

Určete, kolik existuje pořadí písmen A, B, D, E, I, K, M, N, R, Ů, Z takových, že po vynechání některých písmen nevznikne ani jedno ze slov BAR, DEN, RAZIE.

Úloha 7 (Královský pat)

Kolika způsoby můžete rozestavit černého a bílého krále na šachovnici 8×8 tak, aby se navzájem neohrožovali?

Úloha 8 (Ples)

Na plese je n párů. Kolik je rozdělání do dvojic takových, že žádný pár netančí spolu?

(Hint: nemusíte vyčíslovat, pokud se vám podaří využít nějaký výsledek z přednášky, naprosto to postačuje.)

Úloha 9 (Křížící se tětivy)

Kolik je v konvexním n -úhelníku dvojic tětív, jež se navzájem protínají uvnitř n -úhelníku, tedy nikoli v krajních bodech?