

4. cvičení

Diskrétní matematika, 21. 10. 2020

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/>

Úloha 1 (Relační průzkum)

Rozhodněte, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické. Dále rozhodněte, zda se jedná o ekvivalence či částečná uspořádání. Pokud se jedná o ekvivalenci, popište třídy ekvivalence. Pokud se jedná o částečné uspořádání, určete velikost největšího antiřetězce a určete, zda je uspořádání lineární.

- $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$
- $R_2 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}^2 : \text{NSD}(x, y) = 1\}$
- $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : a \leq b\}$
- $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + y = 10\}$

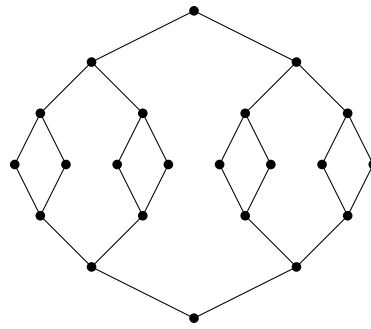
Úloha 2 (Vlastnosti upravených ekvivalencí)

Buďte R, S ekvivalence. Rozhodněte, zda následující relace jsou také ekvivalence

- $R \cup S$
- $R \cap S$
- $R \setminus S$

Úloha 3 (Řetězce)

V následujícím Hasseově diagramu nalezněte největší řetězec a antiřetězec.



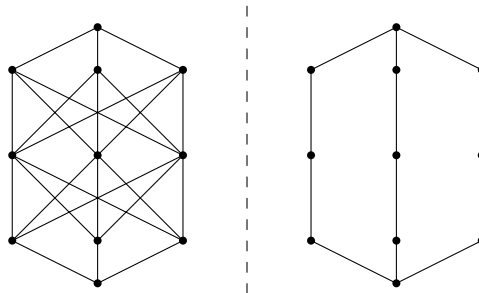
Úloha 4 (Hledá se uspořádání)

Rozhodněte, zda existuje uspořádání splňující danou podmínku. Pokud ano, uveďte nějaký příklad.

- bez největšího prvku, ale s maximálním prvkem; na neprázdné konečné množině
- bez největšího prvku a bez nejmenšího prvku; na neprázdné konečné množině
- bez největšího prvku a bez maximálního prvku; na neprázdné konečné množině
- bez nekonečného řetězce; na nekonečné množině

Úloha 5 (Lineární rozšíření)

Kolika způsoby lze rozšířit následující dvě částečná uspořádání reprezentovaná Hasseovými diagramy na lineární uspořádání?



Úloha 6 (Neizomorfní uspořádání)

Nalezněte dvě navzájem neizomorfní lineární uspořádání na spočetné množině.

Úloha 7 (Zvláštní lineární uspořádání)

Najděte lineární uspořádání, v němž má každý prvek bezprostředního předchůdce, ale ne každý prvek má bezprostředního následníka.

Úloha 8 (Dlouhý, široký a těsný)

Ukažte, že odhad ve Větě o dlouhém a širokém je těsný, tedy pro libovolné $n, m \in \mathbb{N}$ nalezněte částečně uspořádanou množinu se šířkou m , výškou n a $n \cdot m$ prvky.