3. cvičení

Diskrétní matematika, 14. 10. 2020 `https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/`

Úloha 1 (Počty relací)
Určete počet relací na čtyřech prvcích, které jsou:

a) libovolné b) reflexivní c) symetrické d) antisymetrické

Co kdyby byl počet prvků n?

Úloha 2 (Počty funkcí)
Kolik je zobrazení $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$? Kolik jich je prostých?

Úloha 3 (Skládání funkcí)
Rozhodněte a dokažte, zda pro libovolnou neprázdnou množinu M a zobrazení $f : M \to M, g : M \to M$ (tj. z množiny M do téže množiny) platí následující tvrzení:

- Pokud $f \circ g$ je na, pak f je na
- Pokud $f \circ g$ je na, pak g je na

Připomeňme, že dle definice z přednášky pro skládání $f \circ g$ platí, že $x \in M$ se zobrazí na $g(f(x))$. Pokud dokazujete pro obrácené pořadí aplikací, taky to nevadí. *Jenom buďte v obou bodech s pořadím konzistentní, abyste dvakrát nedokazovali totéž.*

Úloha 4 (Vlastnosti upravených relací)
Buďte R, S reflexivní/symetrické relace. Které z následujících relací jsou také reflexivní/symetrické?

a) $R \cup S$ c) $R \setminus S$ e) $R \circ S$

b) $R \cap S$ d) $R \triangle S = (R \setminus S) \cup (S \setminus R)$ f) R^{-1}

Úloha 5 (Relační průzkum)
Rozhodněte, zda jsou následující relace reflexivní, symetrické, tranzitivní a antisymetrické. Dále rozhodněte, zda se jedná o ekvivalence či částečná uspořádání.

a) $R_1 = \{(x, y) \in \{1, 2, 3, \ldots, 10\}^2 : \mathrm{NSD}(x, y) = 1\}$
b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in \mathbb{Z}\}$
c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + y = 10\}$
d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 : a \leq b\}$

Úloha 6 (Antisymetrické podmnožiny)
Buď R antisymetrická relace na X. Ukažte, že každá relace $S \subset R$ je také antisymetrická.

Úloha 7 (Stejně velké množiny)
Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy(–Schröderovy) věty ukažte, že množiny $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ mají všechny stejnou mohutnost.