2. cvičení

Diskrétní matematika, 7. 10. 2020 `https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/`

Úloha 0 (Množiny z minula)
Pro obecné množiny A, B doplňte místo podtržítek vždy jedno z $\subset$, $\supset$, $=$:

a) $\mathcal{P}(A \cup B) \_ \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

b) $\mathcal{P}(A \cap B) \_ \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Důkazy

Úloha 1 (Vzorečky)
Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$

b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Úloha 2 (Čokoláda)
Uvažte tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete mn jednotlivých dílků.
Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

Úloha 3 (Chybný důkaz)
Najděte chybu v důkazu následujícího tvrzení: *Všichni koně mají stejnou barvu.*

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle počtu koní (označíme jej n).
Báze: $n = 1$ – jeden kůň má jistě stejnou barvu jako on sám.
Indukční krok: Nyní mějme $n \geq 2$, předpokládáme platnost pro $n-1$ a označme si koně $K_1, \ldots, K_n$. Uvážíme prvních $n-1$ koní $K_1, \ldots, K_{n-1}$, kteří z indukčního předpokladu mají stejnou barvu. Stejně tak posledních $n-1$ koní $K_2, \ldots, K_{n-1}, K_n$ má z indukčního předpokladu stejnou barvu. Ovšem kůň K_{n-1} byl v obou skupinách, a tedy všech n koní musí mít stejnou barvu. □

Úloha 4 (Šachovnice bez políčka)
Na šachovnici $2^n \times 2^n$ chybí jedno libovolné políčko. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru L, které zabírají tři políčka.

Úloha 5 (Iracionalita $\sqrt{2}$)
Dokažte, že $\sqrt{2}$ je iracionální číslo.

Úloha 6 (Fibonacci)
Posloupnost Fibonacciho čísel je definována následovně: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,

b) $F_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$,

c) $2|F_n \Leftrightarrow 3|n$.

Trikovější důkazy

Úloha 7 (Školka u kulatého stolu)
Kolem kulatého stolu sedí 22 dětí: 11 děvčat a 11 chlapců. Ukažte, že nezávisle na rozsazení existuje dítě (ne nutně chlapec), které sedí mezi dvěma děvčaty. Jaká je situace pro 12 děvčat a 10 chlapců, případně 10 děvčat a 12 chlapců?

Úloha 8 (Mravenci na tyči)
Na tyči délky 1 metr je po centimetru rozmístěno 101 mravenců. Ti směřují buď vlevo nebo vpravo a pohybují se rychlostí 1 cm/s. Na tyči je málo místa, takže pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout, a tedy se otočí a pokračují opačným směrem. Když dojdou na okraj tyče, spadnou. Ukažte, že za 101 vteřin na tyči už jistě nebudou žádní mravenci.

Úloha 9 (Čokoládová hra)
Dva hráči lámají čokoládu velikosti $2m \times n$. Lámání má stejná pravidla jako v předchozí úloze o čokoládě, ale navíc se nesmí odlamovat kousky velikosti 1×1. Rozhodněte, který z hráčů má vyhrávající strategii.

Úloha 10 (Šachovnice bez rohů)
Ze šachovnice velikosti 8×8 odstraníme políčka v e dvou protilehlých rozích. Je nyní možné pokrýt šachovnici dominovými kostkami 2×1?

Úloha 11 (Šachovnice s rohy)
Je možné šachovnici 10×10 pokrýt T-tetrominy? (T-tetromino je dílek skládající se ze čtyř čtverečků ve tvaru písmene T.)