12. cvičení

Diskrétní matematika, 6. 1. 2021 `https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/`

Definice 1 (Obarvení a chromatické číslo grafu)
Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že $c : V \to [k]$ je (dobré) obarvení grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $e = \{u, v\}$ platí, že $c(u) \neq c(v)$.
Dále chromatické číslo grafu G, značené $\chi(G)$, je nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje obarvení G pomocí k barev.

Úloha 1 (Čtyři barvy (někdy) stačí)
Dokažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků lze obarvit čtyřmi barvami.

Úloha 2 (Barevnost duálu)
Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Úloha 3 (V kolečku)
Kolem kulatého stolu sedí 22 dětí, 11 chlapců a 11 děvčat. Dokažte, že alespoň jedno dítě (ne nutně chlapec) sedí mezi dvěma děvčaty.

Úloha 4 (Zakázaný večírek)
Na večírku se sešlo šest lidí. Ukažte, že existuje trojice lidí, kteří se navzájem znají, nebo trojice lidí, kteří se navzájem neznají.

Úloha 5 (Občas stačí i tři barvy)
Dokažte větu o třech barvách pro vnějškové rovinné grafy (tj. grafy takové, že existuje jejich rovinné nakreslení, kde všechny vrcholy leží na vnější stěně).

Úloha 6 (Hudební výchova)
Pusťte si následující video: `https://www.youtube.com/watch?v=ASvxT8evIB8`, text k němu můžete najít zde: `http://kti.ms.mff.cuni.cz/~kucerap/vo5barvach.html`.

Blíží se zkouška

1. Zformulujte větu o skóre a nalezněte dva neizomorfní grafy se stejným skóre.
2. Vyslovte a dokažte princip inkluze a exkluze.
3. Charakterizujte ekvivalenci.
4. Graf má n vrcholů a $n - k$ hran. Kolik nejméně a nejvíce může mít komponent souvislosti?
5. Nechť K_n je graf na množině vrcholů $\{1, 2, \ldots, n\}$ a hrana $\{i, j\}$ je ohodnocena hodnotou $\max\{i, j\}$. Nalezněte jeho minimální kostru a spočítejte jeho váhu.
6. Nalezněte dva neizomorfní stromy se stejným skóre.
7. Určete, kolik koster má graf $K_{2,n}$.
8. Dokažte, že pro každý souvislý graf G na alespoň dvou vrcholech existují vrcholy u a v takové, že $G - v$ i $G - u$ jsou souvislé.
9. Kolika způsoby můžu vybrat uspořádanou trojici (A, B, C) tak, že A, B, C tvoří disjunktní rozklad $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bonusové úlohy

Úloha 7 (Obarvíme všechno jako včelí medvídci)
Dokažte, že pro každý graf s maximálním stupněm Δ platí $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
Hint: zkuste to ukázat pomocí nějakého (jednoduchého hladového) algoritmu.