

11. cvičení

Diskrétní matematika, 16. 12. 2020

<https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/>

Definice 1 (Rovinný graf)

Graf G je rovinný, jestliže existuje jeho rovinné nakreslení (tj. nakreslení do roviny takové, že žádné dva oblouky se vyjma koncových bodů nedotýkají).

Věta 1 (Eulerova formule, 1752)

Pokud $G = (V, E)$ je souvislý rovinný graf a f je počet stěn nějakého rovinného nakreslení G , pak $|V| - |E| + f = 2$.

Důsledek 1 (Důsledky Eulerovy formule)

Počet stěn nakreslení rovinného grafu nezávisí na nakreslení.

Každý rovinný graf má vrchol stupně ≤ 5 .

Definice 2 (Podrozdělení hrany, dělení grafu)

Je-li $G = (V, E)$ graf, $e \in E$ jeho hrana, pak podrozdělení hrany $e = \{u, v\}$ je graf $G' = (V \cup \{e\}, E \cup \{\{e, v\}, \{u, v\}\})$. (Neformálně: vezmeme hranu, a nahradíme ji cestou.)

Graf H je dělení grafu G , jestliže lze graf H vytvořit z grafu G opakováním operace podrozdělení hran.

Věta 2 (Kuratowski, 1930)

Graf je rovinný, právě když neobsahuje dělení K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgraf.

Definice 3 (d -degenerovanost grafu)

Řekneme, že $G = (V, E)$ je d -degenerovaný, pokud můžeme vrcholy grafu seřadit do posloupnosti (v_1, \dots, v_n) tak, že pro každé $i \in [n]$ platí, že v_i sousedí s nejvýše d vrcholy z množiny $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. (Na posloupnost se můžeme dívat „z druhé strany“ jako na pořadí odebírání vrcholů tak, že vždycky odebíráme vrchol stupně nejvýše d .)

Definice 4 (Obarvení a chromatické číslo grafu)

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Řekneme, že $c : V \rightarrow [k]$ je (dobré) obarvení grafu G pomocí k barev, pokud pro každou hranu $e = \{u, v\}$ platí, že $c(u) \neq c(v)$.

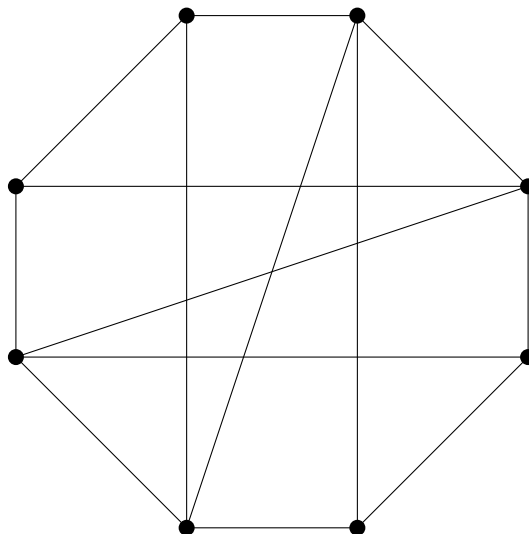
Dále chromatické číslo grafu G , značené $\chi(G)$, je nejmenší přirozené číslo k takové, že existuje obarvení G pomocí k barev.

Úloha 0 (Zahrajte si (po cvičení))

Na adrese <https://www.jasondavies.com/planarity/> můžete najít hru, kde máte za úkol rozmotat nakreslení grafu, aby bylo rovinné. Pokud chcete získat lepší intuici pro rovinné grafy, je to, řekl bych, celkem zábavný způsob :)

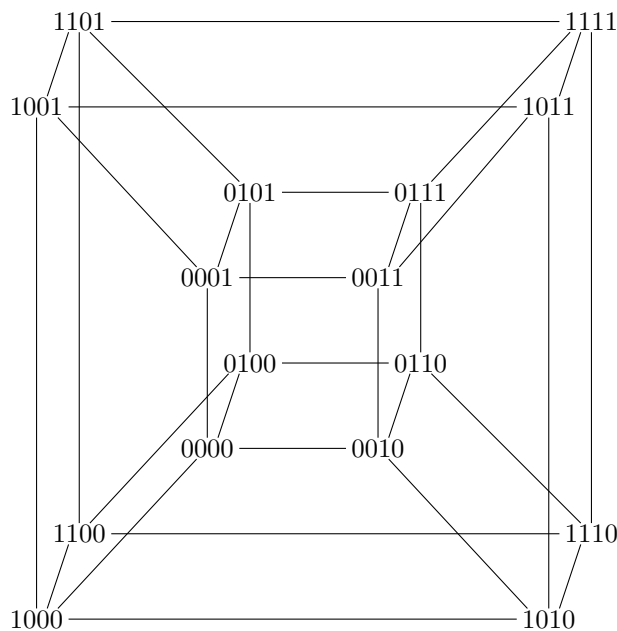
Úloha 1 (Je tenhle graf rovinný?)

Rozhodněte, zda je následující graf rovinný:



Úloha 2 (Tesseract, ale ne ten od Marvelu)

Dokažte, že tesseract Q_4 (čtyřdimenzionální ekvivalent krychle) není rovinný graf.

**Úloha 3** (Počet stěn)

Ukažte, že počet stěn v rovinném nakreslení grafu s alespoň třemi vrcholy je nejvýše:

- $2n - 4$
- $n - 2$, pokud graf neobsahuje žádné trojúhelníky

Úloha 4 (Doplňky rovinných grafů)

Ukažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy nemůže být rovinný a najděte příklad co do počtu vrcholů největšího rovinného grafu, jehož doplněk je rovinný.

Úloha 5 (Kubické rovinné grafy)

Existuje kubický (3-regulární) rovinný graf, který obsahuje:

- právě 12 šestiúhelníkových stěn?
- právě 12 pětiúhelníkových stěn?
- právě jednu dvacetiúhelníkovou stěnu a k tomu 10 pětiúhelníkových stěn?

Úloha 6 (Čtyři barvy (někdy) stačí)

Dokažte, že každý rovinný graf bez trojúhelníků lze obarvit čtyřmi barvami.

Úloha 7 (Barevnost duálu)

Ukažte, že má-li rovinný graf sudé stupně, pak je barevnost jeho duálu rovna dvěma.

Bonusové úlohy**Úloha 8** (Obarvíme všechno jako včelí medvídci)

Dokažte, že pro každý graf s maximálním stupněm Δ platí $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

Hint: zkuste to ukázat pomocí nějakého (jednoduchého hladového) algoritmu.