10. cvičení

Definice 1 (Orientovaný graf, multigraf)

Dvojice $\vec{G} = (V, E)$ je orientovaný graf, jestliže $E \subseteq V \times V$. Neformálně: graf, jehož hrany mají směr.
Vstupní stupeň (indegree) vrcholu v je počet hran, které z v vycházejí a výstupní stupeň téhož vrcholu je počet hran, které do v vstupují.

Symetrizace grafu $\vec{G}$ je graf $G = (V, E')$, kde $E' = \{\{u, v\} \in \binom{V}{2} : (u, v) \in E \vee (v, u) \in E\}$. (Neformálně: graf, u kterého zapomeneme orientaci hran, případné protichůdné hrany $(u, v), (v, u)$ sloučíme do jedné.)
Dvojice $G = (V, E)$ je multigraf, jestliže E je multimnožina neuspořádaných dvojic prvků. (Tedy se jedná o „rozšířený“ graf, kde mezi dvěma vrcholy může být více hran.)

Věta 1 (Věta o eulerovských multigrafech)
Buď G multigraf. Pak G je eulerovský, právě když G je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň.

Věta 2 (Věta o eulerovských orientovaných grafech)
Buď G orientovaný graf. Pak G je eulerovský (má eulerovský uzavřený orientovaný tah), právě když symetrizace G je souvislá a každý jeho vrchol má stejný vstupní a výstupní stupeň.

Věta 3 (Cayleyho formule)
Úplný graf K_n má n^{n-2} různých koster.

Definice 2 (Kontrakce hrany)
Buď $G = (V, E)$ graf, $\{u, v\} = e \in E$ jeho hrana. Pak grafem $G \circ e$ (nebo též G/e) značíme graf, který vznikne z grafu G tím, že vrcholy u, v nahradíme vrcholem w, který sousedí se všemi původními sousedy vrcholů u, v. (Neformálně: vrcholy u a v „slepíme“ do jednoho vrcholu a násobné hrany zapomeneme.)
Často se kontrakce definuje tak, že násobné hrany nezapomínáme, tím pádem by výsledkem byl multigraf i se smyčkami.

Úloha 1 (O počtu listů stromu s vrcholem vysokého stupně)
Dokažte, že pokud v konečném stromu T existuje vrchol stupně k, tak potom T má alespoň k listů.

Úloha 2 (Určení počtu koster)
Nechť m, n, k jsou přirozená čísla taková, aby příslušné podúlohy dávaly smysl. Určete počet koster následujících grafů:

a) C_n

b) Činka, tedy K_n spojený s K_m cestou délky k

c) Strom na n vrcholech

d) Graf G_1 z následujícího obrázku

e) Multigraf G_2 z následujícího obrázku

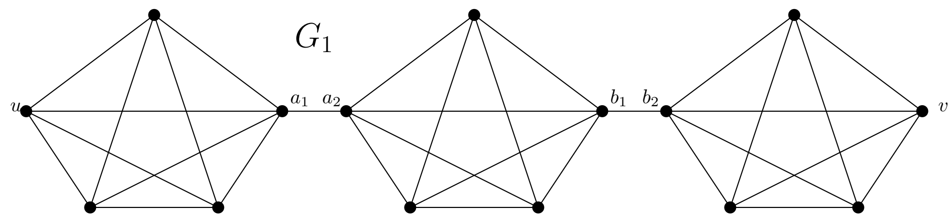
f) K_n bez jedné hrany

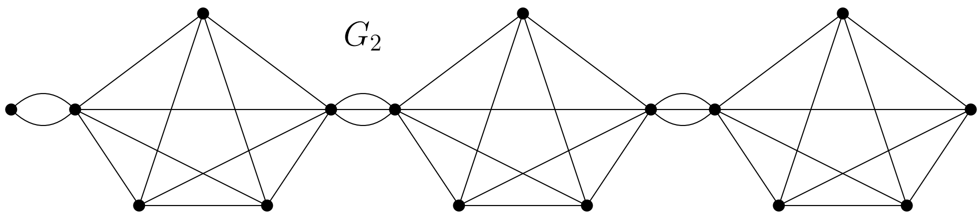
g) Graf obsahující dva vrcholy u, v spojené třemi různými cestami délek m, n a k

h) Úplný bipartitní graf $K_{n,2}$

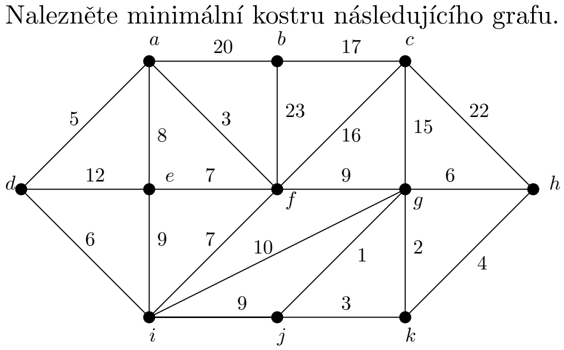
i) Graf G_1, propojíme-li hranou navíc vrcholy u a v

j) Graf G_1, zkontrahujeme-li hrany $\{a_1, a_2\}$ a $\{b_1, b_2\}$





Úloha 3 (Jarníkovo cvičení)
Nalezněte minimální kostru následujícího grafu.



Úloha 4 (Pálení mostů)
Buď G souvislý graf a e most v G. Rozmyslete si následující pozorování (do jisté míry spolu související):

a) Každá kostra G obsahuje e

b) $G \setminus e$ nemá žádnou kostru

c) Kontrakcí e se počet koster nezmění

Úloha 5 (Skóre stromu)
Mějme posloupnost $1 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ takovou, že $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2n - 2$. Dokažte, že $(d_1, \ldots, d_n)$ je skóre stromu.

Úloha 6 (Počet listů a vnitřní stupně 3)
Mějme strom, který má l listů a v vnitřních vrcholů, kde každý vnitřní vrchol má stupeň 3. Dokažte, že vždy platí $l = v + 2$.