1. cvičení

Diskrétní matematika, 30. 9. 2020 `https://kam.mff.cuni.cz/~chmel/2021/DM/`

Úloha 0 (Typy důkazů)
Dokažte, že $\forall n \in \mathbb{N} : 4|(6n^2 + 2n)$

a) přímo
b) sporem
c) matematickou indukcí

Úloha 1 (Výroky)
Nechť M označuje množinu osob „přítomných“ na Zoomu a nechť predikát $Z(x, y)$ pro $x, y \in M$ znamená „osoba x zná příjmení osoby y“. Zkoumejte platnost následujících výroků:

a) $\forall x \in M\, \exists y \in M : Z(x, y)$
b) $\forall y \in M\, \exists x \in M : Z(x, y)$
c) $\forall x \in M\, \exists y \in M \setminus \{x\} : Z(x, y)$
d) $\forall y \in M\, \exists x \in M \setminus \{y\} : Z(x, y)$
e) $\exists x \in M\, \forall y \in M : Z(x, y)$
f) $\exists y \in M\, \forall x \in M : Z(x, y)$

Úloha 2 (Výroky podruhé)
Platí výrok $\neg(\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R} : (z > y \Rightarrow z > x)) \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \exists z \in \mathbb{R} : (z > y \wedge z \leq x))$?

Úloha 3 (Množiny)
Nechť A, B, C, D jsou libovolné množiny. Zadefinujeme $M_1 = A \setminus (B \cup C \cup D), M_2 = A \setminus (B \cap C \cap D), M_3 = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \setminus D), M_4 = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \cap (A \setminus D)$. Místo podtržítek doplňte vždy jedno z $\subset$, $\supset$, $=$:

a) $M_1 \mathrel{\_} M_2$
b) $M_1 \mathrel{\_} M_3$
c) $M_1 \mathrel{\_} M_4$
d) $M_2 \mathrel{\_} M_3$
e) $M_2 \mathrel{\_} M_4$
f) $M_3 \mathrel{\_} M_4$
g) $\bigcup_{i=0}^{\infty} \{X : X \subseteq \mathbb{N} \wedge |X| = i\} \mathrel{\_} \mathcal{P}(\mathbb{N})$
h) $\mathcal{P}(A \cup B) \mathrel{\_} \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
i) $\mathcal{P}(A \cap B) \mathrel{\_} \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Úloha 4 (Množina a její prvky)
Kolik prvků má množina $\Big\{\{a, \{b\}\}, a, \{\}, \{a\}, \{a, b\}, \{b, a\}\Big\}$? Které prvky to jsou?

Matematická indukce

Úloha 5 (Vzorečky)
Dokažte matematickou indukcí platnost následujících vztahů pro každé $n \in \mathbb{N}$:

a) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$
b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Úloha 6 (Čokoláda)
Uvažte tabulku čokolády o $m \times n$ dílcích. Určete, kolikrát budete muset nějakou část čokolády rozlomit na dvě menší části než dostanete mn jednotlivých dílků.
Závisí výsledný počet lámání na zvoleném postupu?

Úloha 7 (Chybný důkaz)
Najděte chybu v důkazu následujícího tvrzení: *Všichni koně mají stejnou barvu.*

Důkaz. Důkaz povedeme indukcí podle počtu koní (označíme jej n).
Báze: $n = 1$ – jeden kůň má jistě stejnou barvu jako on sám.
Indukční krok: Nyní mějme $n \geq 2$, předpokládáme platnost pro $n - 1$ a označme si koně $K_1, \ldots, K_n$. Uvážíme prvních $n-1$ koní $K_1, \ldots, K_{n-1}$, kteří z indukčního předpokladu mají stejnou barvu. Stejně tak posledních $n-1$ koní $K_2, \ldots, K_{n-1}, K_n$ má z indukčního předpokladu stejnou barvu. Ovšem kůň K_{n-1} byl v obou skupinách, a tedy všech n koní musí mít stejnou barvu. □

Úloha 8 (Šachovnice)
Na šachovnici $2^n \times 2^n$ chybí jedno libovolné políčko. Ukažte, že zbylou plochu lze vydláždit dlaždicemi tvaru `L`, které zabírají tři políčka.

Úloha 9 (Fibonacci)
Posloupnost Fibonacciho čísel je definována následovně: $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 2$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$,

b) $F_n \leq (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n-1}$,

c) $2|F_n \Leftrightarrow 3|n$.

Úloha 10 (Dělení roviny)
Dokažte, že počet částí roviny při rozdělení n přímkami je nejvýše $1 + \frac{n^2+n}{2}$.